

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2019

Направление: «Математика»

Профили:

"Математика / Mathematics"

"Математическая физика / Mathematical physics"

Время выполнения задания — **240 минут**

1. Правила олимпиады не позволяют участникам иметь на рабочем месте ничего, кроме бланка работы, а также ручки, воды, шоколада и их аналогов. В том числе, на рабочем месте не допускаются письменные или печатные материалы и электронные устройства, а также обращение к другим участникам олимпиады.
2. Каждая из задач оценивается из 20 баллов. Если сумма набранных баллов превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам. Задание состоит из общей части (четыре задачи) и двух специальных частей “математика” и “математическая физика”, по две задачи каждая. Участник олимпиады, помимо задач общей части, выбирает одну (и только одну) из двух специальных частей по своему усмотрению.
3. Если Вы рассматриваете возможность использовать результаты олимпиады для поступления вне конкурса на магистерские программы НИУ ВШЭ (“Математика и математическая физика”, “Mathematics”, Совместная магистратура НИУ ВШЭ и Центра Педагогического Мастерства), то Вам также важно ознакомиться со следующей информацией.

ВЫБОР СПЕЦИАЛИЗАЦИИ. Выбор специальной части олимпиады (“математика” или “математическая физика”), а также впоследствии языка обучения (русскоязычная программа “Математика и математическая физика” или англоязычная “Mathematics”), **не влияет** на последующую специализацию в магистратуре: например, можно решать спецчасть “Mathematics”, но в магистратуре (в случае успешного поступления) выбрать профиль “Математическая физика”, и наоборот. Также не зависит от выбора специальной части олимпиады возможность поступления в Совместную магистратуру ВШЭ–ЦПМ.

ВЫБОР ЯЗЫКА. Если Вы планируете поступать на любой из двух профилей (“математика” и “математическая физика”) англоязычной программы “Mathematics”, то решения **всех** задач следует записывать по-английски. Поступающим на любой из двух профилей (“математика” и “математическая физика”) русскоязычной программы “Математика и математическая физика”, а также в Совместную магистратуру ВШЭ–ЦПМ, можно все решения писать по-русски.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART

1. Шесть одинаковых монет лежат в вершинах правильного шестиугольника, касаясь друг друга. Седьмая такая же монета катится без скольжения по внешней стороне этих, касаясь их по очереди. Сколько оборотов сделает эта монета, вернувшись в исходное положение?

Six identical coins lie at the vertices of a regular hexagon touching each other. The seventh coin of the same size rolls without slipping along the exterior sides of these ones, touching them one after another. How many full turns has the last coin made, when it returns to the initial position for the first time?

2. Придумайте некоммутативную группу с нечетным количеством элементов.

Construct a noncommutative group with an odd number of elements.

3. Может ли множество всех движений плоскости, переводящих данный многоугольник в себя, состоять из

- a) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 2017 меняющих ориентацию;
- b) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 1720 меняющих ориентацию;
- c) только из 2017 сохраняющих ориентацию движений?

Can the set of all the isometries of the plane taking a given polygon onto itself consist

- a) of 2017 orientation-preserving isometries and 2017 orientation-reversing isometries;
- b) of 2017 orientation-preserving isometries and 1720 orientation-reversing isometries;
- c) just of 2017 orientation-preserving isometries?

4. Существует ли функция f , аналитическая на всей комплексной плоскости, такая что $f(z)^3 = 1 + e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

Does there exist a function f , analytic on the whole complex plane, such that $f(z)^3 = 1 + e^z$ for each $z \in \mathbb{C}$?

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

М: «Математика» / «Mathematics»

М1. В двумерном пространстве сила притяжения между точечными массами обратно пропорциональна расстоянию между ними. Докажите, что любая система из 100 закрепленных точечных масс в двумерном пространстве будет иметь меньше 100 точек равновесия (то есть таких точек, в которых силы притяжения этих точечных масс уравновешиваются).

In two-dimensional space, the attraction force between point masses is inversely proportional to the distance between them. Prove that each system of 100 fixed point masses in two-dimensional space has less than 100 equilibrium points (that is, points such that the attraction forces of the point masses equilibrate).

М2. Дано число $0 < C < 1$. В отрезке $[0, 1]$ дана последовательность компактов с мерами не менее C . Верно ли, что всегда в ней найдется подпоследовательность, пересечение которой имеет положительную меру?

Let $0 < C < 1$ be a fixed number. Is it true that each sequence of compact subsets of the unit segment $[0; 1]$ having measure at least C contains a subsequence, in which the intersection of all the compacta has positive measure?

Ф: «Математическая физика» / «Mathematical physics»

Ф1. На концах тонкого невесомого нерастяжимого стержня длины l закреплены два одинаковых небольших массивных шарика. В начальный момент эта конструкция стоит вертикально на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Нижнему шарiku мгновенно сообщается скорость v_0 в горизонтальном направлении (то есть, параллельно поверхности).

- а) При каких значениях скорости v_0 нижний шарик будет скользить, не отрываясь от плоскости?
- б) В условиях предыдущего пункта найдите модуль и направление вектора скорости верхнего шарика в момент его удара о плоскость.

Two identical small massive balls are fixed at the ends of a massless thin inextensible rod of length l . This construction stands upright on an absolutely smooth horizontal plane. At some moment of time the lower ball is instantly given a horizontal speed v_0 .

- а) At what values v_0 the lower ball will slide without coming off the plane?
- б) In the setting of Part (a), find the absolute value and direction of the speed vector of the upper ball at the moment when it hits the plane.

Ф2. Пластины плоского конденсатора, имеющие форму квадрата со стороной a , расположены на расстоянии d друг от друга. Расстояние d пренебрежимо мало по сравнению с длиной стороны квадрата a . Конденсатор подключен к идеальному источнику постоянного тока с ЭДС U . Квадратная пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , стороной квадрата a и толщиной d вставлена в пространство между пластинами конденсатора на расстояние x , $0 \leq x \leq a$. Найдите величину силы, втягивающей диэлектрик внутрь конденсатора. Объясните физическую причину возникновения такой силы.

Square shaped plates of a capacitor with the side of length a are located at the distance d from each other. The distance d is negligible small compared with a . The capacitor is connected to an ideal direct current source with EMF U . A square shaped plate made of a dielectric material with permittivity ε , the side length a and thickness d is inserted in the space between the capacitor plates at the distance x , $0 \leq x \leq a$. Find the value of a force pulling the dielectric plate into the capacitor. Describe a physical reason for such a force to occur.