

Время на выполнение заданий — 120 минут

Вам необходимо привести решение всех заданий. Обратите внимание, что ответы без решений и необходимых пояснений не будут засчитаны! Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все неизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе. Всегда обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи.

Удачи!

Задание 1. «Закон и порядок» (20 баллов)

Власти страны N обеспокоены криминогенной обстановкой в регионах своего государства. Для детального изучения причин существующих проблем президент страны N обратился к двум уважаемым ученым, Кнутову и Пряникову. Исследователи проделали огромную работу по сбору и обработке данных и вывели следующую эмпирическую закономерность:

$$r_i = 12 + 0,25 \cdot n_i^{\text{homeless}} + \beta \cdot X_i$$

где:

- r_i отражает уровень преступности в регионе i , измеренный как общее количество преступлений, совершенных за год;
- n_i^{homeless} определяет общее число бездомных в регионе i за год;
- $\beta \cdot X_i$ улавливает влияние прочих региональных факторов на уровень преступности.

Кнутов и Пряников интерпретировали полученные результаты следующим образом:

“Согласно проведенному анализу, именно высокое количество бездомных в регионе провоцирует рост уровня преступности. В качестве основной рекомендации властям страны N предлагается обеспечить бездомных жильем, что приведет к значительному снижению общего числа совершенных преступлений”.

Поскольку Кнутов и Пряников являются уважаемыми экспертами, президент страны N последовал их совету и затратил значительную сумму бюджетных средств на обеспечение бездомных жильем, что позволило достичь $n_i^{\text{homeless}} = 0$ в каждом из регионов. Однако указанные меры не привели к ожидаемому снижению уровня преступности: данный показатель практически не изменился!

1. **(10 баллов)** Чем можно объяснить тот факт, что общий уровень преступности не снизился в результате предпринятых властями страны N мер по обеспечению бездомных жильем, несмотря на аналитические выкладки Кнутова и Пряникова?

Ответ. Основные аргументы:

- Кнутов и Пряников ошиблись и не учли, что может существовать третий фактор, который влияет как на общий уровень преступности, так и на количество бездомных и объясняет их совместную динамику. Таким фактором может быть, например, безработица в регионе, потребление алкоголя / наркотиков на душу населения, этнический состав жителей того или иного региона, количество мигрантов и пр.;
- Сама причинно-следственная интерпретация эффекта была ошибочна. Так, можно утверждать, что рост общего числа правонарушений ведет к увеличению количества бездомных за счет мошенничества с недвижимостью и прочих подобных противоправных действий;
- Сам факт приобретения жилья бездомными без каких-либо изменений в их уровне дохода и стиле жизни не исключает их вовлеченность в преступную активность (устойчивость предпочтений);
- Реформа повлияла не только на бездомных, но и на людей, которые из-за этого стали получать меньше государственных дотаций (из-за рефинансирования бюджета). В результате произошедших изменений уровень жизни населения мог снизиться, а вовлеченность граждан, имеющих жилье, в криминальную активность – повыситься.

2. (**10 баллов**) Несмотря на провал реформы, предложенной Кнутовым и Пряниковым, президент страны N все же намерен выяснить, является ли рост числа бездомных в регионе причиной увеличения общего уровня преступности. Один из стандартных подходов к выявлению причинно-следственных связей подразумевает деление выборки на контрольную и испытуемую группы случайным образом. Предполагается, что данные группы идентичны по всем характеристикам. Реформа, эффект которой нужно оценить, применяется только к испытуемой группе, тогда как для контрольной группы ничего не изменяется. Поскольку исходные условия были идентичны для обеих групп, наблюдаемые различия объясняются исключительно реформой, которой подверглась испытуемая группа. *Используя логику указанного метода, предложите «идеальный» подход (не обязательно реализуемый на практике) для выявления причинно-следственной связи между количеством бездомных в регионе и общим уровнем преступности посредством проведения реформы, направленной на обеспечение бездомных жильем. Укажите **две (2)** причины, по которым такой подход может быть сложно реализовать на практике.* Если вы укажете три причины и более, то засчитаны будут только первые две.

Ответ. Идеальный сценарий:

- Взять два или более регионов со схожим уровнем преступности, сравнимым количеством бездомных и идентичными макроэкономическими показателями (группы должны быть гомогенными);
- Случайным образом выбрать регион(ы), где будет осуществляться реформа по снижению количества бездомных путем выделения им жилой площади. Это определит испытуемую группу. При этом в контрольной группе должен остаться как минимум один регион;

- Провести реформу по обеспечению бездомных жильем в испытываемых регионах, при этом тщательно следя, чтобы все остальные ключевые показатели (уровень безработицы, доходы на душу населения и пр.) оставались неизменными во всех рассматриваемых регионах;
- Проверить, как изменился общий уровень преступности в контрольных и испытываемых регионах. Поскольку все факторы, за исключением реформы, были идентичны для обеих групп, наблюдаемая (или ненаблюдаемая) разница в общем уровне преступности между контрольными и испытываемыми регионами объясняется лишь реформой.

Причины, по которым такой подход может не работать:

- Если регионы сильно отличаются по базовым характеристикам, то может быть проблематично определить контрольную и наблюдаемую группы;
- Значительные затраты бюджетных средств на реализацию подобных программ;
- Потенциально проблематично изолировать другие шоки регионального уровня, которые определяют как общий уровень преступности, так и количество бездомных (тот же уровень безработицы);
- Регионы – открытые системы, что позволяет людям перемещаться из одной локации в другую. Так, если бездомные в одном регионе наблюдают, что в другом регионе люди, оказавшиеся в подобной жизненной ситуации, получают жилье, то у них могут возникнуть стимулы переселиться. Тогда число бездомных в контрольном регионе снизится за счет переезда лиц из данной группы в испытываемый регион, что значительно повлияет на точность результатов эксперимента.

Критерии оценивания

1. (10 баллов) Распределение баллов:

- До **5 баллов** ставится за указание причины, по которой предложенная учеными реформа не принесла ожидаемого эффекта;
- До **5 баллов** дается за пояснения к причине, указанной выше.

2. (10 баллов) Распределение баллов:

- Максимум **4 балла** дается за аргументированное описание эксперимента, где должны быть указаны **случайность** выбора испытываемой и контрольной групп, а также **идентичность** этих групп по всем прочим характеристикам:
 - Ясное и аргументированное изложение хода эксперимента – **2 балла**;
 - Указание на случайность выбора групп – **1 балл**;
 - Указание на идентичность групп по всем прочим характеристикам – **1 балл**.
- Максимум **6 баллов** ставится за указание двух аргументированных причин, почему предложенный эксперимент сложно реализовать на практике:
 - По **1 баллу** дается за указание убедительной причины;
 - До **2 баллов** дается за пояснения к ней (почему в условиях эксперимента это затруднение критично и как оно может повлиять на его исход);
 - Засчитываются только первые две (2) из указанных причин. Причины, которые появляются под номерами 3 и выше, не засчитываются.

Задание 2. «Роялти» (20 баллов)

Рыночный спрос на товар X описывается функцией $q_d(p) = 2 - p$. В данный момент на рынке товара X в качестве монополиста действует фирма A; фирма B рассматривает возможность входа на этот рынок. Отличительная особенность функционирования данной отрасли состоит в том, что фирма A обладает патентом на производство товара X. Это значит, что если фирма B захочет выпускать товар X, то ей придётся перечислять фирме A роялти – платёж в размере $\$t$ с каждой произведённой единицы продукции – за право пользоваться запатентованной технологией. Производство единицы товара X с помощью этой технологии обходится в $\$1$. Взаимодействие фирм на рынке происходит следующим образом:

- Фирма A выбирает свой объём выпуска q_A , величину роялти t и объявляет их;
- После этого фирма B, зная выпуск фирмы A и размер роялти, принимает своё решение об объёме производства q_B .

Ответьте на следующие вопросы:

1. (12 баллов) Какой размер роялти установит фирма A? Какими при этом будут объёмы выпуска и прибыль обеих фирм?

Ответ. Заметим, что если фирма B решает не платить роялти фирме A, то её выпуск составит $q_B = 0$, поскольку в таком случае она не будет иметь доступа к технологии производства товара X. Соответственно, прибыль фирмы B также будет нулевой.

Решим задачу методом обратной индукции в предположении, что фирма B производит товар X. Рассмотрим задачу фирмы B:

$$\max_{q_B \geq 0} \{(2 - q_A - q_B)q_B - q_B - tq_B\}$$

или

$$\max_{q_B \geq 0} \{-q_B^2 + q_B(1 - q_A - t)\}$$

Функция прибыли фирмы B квадратичная относительно q_B . График данной квадратичной функции – парабола с ветвями, ориентированными вниз (поскольку старший коэффициент при q_B отрицательный), поэтому максимум прибыли достигается в точке $q_B^* = \frac{1-t-q_A}{2}$. При этом если $q_A \leq 1 - t$, то выпуск фирмы B неотрицательный, а если $q_A > 1 - t$, то выпуск фирмы B нулевой. Строго говоря, оптимальный отклик фирмы B на решение фирмы A (функция реакции фирмы B) имеет вид:

$$q_B^* = \begin{cases} \frac{1-t-q_A}{2}, & q_A \leq 1 - t \\ 0 & q_A > 1 - t \end{cases}$$

Рассмотрим теперь задачу фирмы A при условии $q_A \leq 1 - t$:

$$\max_{q_A \geq 0, t \geq 0} \{(2 - q_A - q_B^*(q_A))q_A - q_A + tq_B^*(q_A)\}$$

или

$$\max_{q_A \geq 0, t \geq 0} \left\{ \left(2 - q_A - \left(\frac{1-t-q_A}{2} \right) \right) q_A - q_A + t \left(\frac{1-t-q_A}{2} \right) \right\}$$

что может быть записано как

$$\max_{q_A \geq 0, t \geq 0} \left\{ \frac{(q_A - q_A^2) + (t - t^2)}{2} \right\}$$

Функция прибыли фирмы А представлена в виде суммы двух квадратичных функций (их графики – параболы с ветвями, ориентированными вниз), причем каждая из этих функций зависит лишь от одной переменной. Таким образом, вместо того чтобы искать максимум функции двух переменных, можно найти отдельно максимумы функций $f(q_A) = \frac{(q_A - q_A^2)}{2}$ и $f(t) = \frac{(t - t^2)}{2}$. Таким образом, будут получены q_A^* и t^* , при которых значение исходной целевой функции максимально.

Максимизируя $f(q_A)$ по q_A и $f(t)$ по t , получаем $q_A^* = 0,5$ и $t^* = 0,5$, причем условие $q_A \leq 1 - t$ выполнено. При этом $q_B^* = 0$, цена на рынке составит $p^* = 1,5$, прибыль фирм А достигнет $\pi_A^* = 0,25$, а прибыль фирмы В – $\pi_B^* = 0$. Значит, фирма А выберет такое значение роялти t^* , при котором фирме В будет невыгодно производить товар Х. Значение роялти $t^* = 0,5$, таким образом, «заградительное»: фирма А не допустит на рынок фирму В и останется монопольным производителем товара Х. Нетрудно убедиться, что объем выпуска фирмы А (q_A^*) и ее прибыль (π_A^*) действительно совпадают с монопольными. Заметим, что фирма, вообще говоря, может выбирать и большие значение роялти: формально, правильным ответом является неравенство $t^* \geq 0,5$ (можно выбрать и $t^* = 1000$, остаться монополистом и получить ту же самую монопольную прибыль, ведь при таких условиях фирма В не войдет в отрасль). Таким образом, $t^* = 0,5$ выступает в качестве «пограничного» значения.

2. (8 баллов) Предположим, что у фирмы В имеется административный ресурс, благодаря которому половину расходов, связанных с производством товара Х, ей компенсируют из бюджета. Иначе говоря, производство единицы товара Х с помощью технологии фирмы А будет обходиться фирме В дешевле: не в \$1, а в \$0,5. При этом расходы фирмы В на выплату роялти в пользу фирмы А не компенсируются. Структура издержек фирмы А осталась неизменной: как и прежде, она затрачивает \$1 на производство единицы товара Х. Как изменятся ваши ответы на вопросы Пункта 1 при новых условиях? Прокомментируйте полученные результаты.

Ответ. Вновь решаем задачу с конца:

$$\max_{q_B \geq 0} \left\{ (2 - q_A - q_B) q_B - \frac{q_B}{2} - t q_B \right\}$$

По аналогии с Пунктом 1 получаем, что функция реакции фирмы В имеет вид:

$$q_B^* = \begin{cases} \frac{1,5 - t - q_A}{2}, & q_A \leq 1,5 - t \\ 0 & q_A > 1,5 - t \end{cases}$$

Тогда задача фирмы А (при условии $q_A \leq 1,5 - t$) запишется следующим образом:

$$\max_{q_A \geq 0, t \geq 0} \left\{ \left(2 - q_A - \left(\frac{1,5 - t - q_A}{2} \right) \right) q_A - q_A + t \left(\frac{1,5 - t - q_A}{2} \right) \right\}$$

или

$$\max_{q_A \geq 0, t \geq 0} \left\{ \frac{(0,5q_A - q_A^2) + (1,5t - t^2)}{2} \right\}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что приведены в Пункте 1. Получим, что максимум прибыли фирмы А достигается при $q_A^* = 0,25$ и $t^* = 0,75$, при этом условие

$q_A \leq 1,5 - t$ выполнено. Также находим $q_B^* = 0,25$, цену товара X ($p^* = 1,5$), прибыль фирмы А ($\pi_A^* = \frac{5}{16}$) и прибыль фирмы В ($\pi_B^* = \frac{1}{16}$). Таким образом, в отличие от предыдущего пункта, фирма А не будет оставаться монополистом на рынке: в новых условиях она получает прибыль больше, чем в случае монополизации ($\frac{5}{16} > \frac{1}{4}$), и ставка роялти устанавливается не на заградительном уровне.

Критерии оценивания

1. (**12 баллов**) Распределение баллов:

- Запись функции прибыли фирмы В – **2 балла**;
- Найден максимум функции прибыли фирмы В (или указана соответствующая функция реакции) – **3 балла**. Также засчитывается нахождение максимума функции прибыли через использование производной. В случае если не проверено, что найден именно максимум функции, снимается **1 балл**. Если не указано, что при $q_A \geq 1 - t$ выпуск фирмы В составляет $q_B^* = 0$, то снимается **1 балл**;
- Запись функции прибыли фирмы А – **2 балла**;
- Найдены оптимальные параметры q_A^* , q_B^* и t^* – **3 балла** (по **1 баллу** за каждый параметр).

Комментарий. В случае нахождения максимума функции двух переменных посредством приравнивания соответствующих частных производные к нулю **без рассмотрения условия второго порядка** (нахождение матрицы Гессе и проверка её знакоопределенности) ставится не более **1 балла**. То же самое правило применяется в отношении Пункта 2 данной задачи.

- Найдены прибыли фирм – по **1 баллу** для каждой фирмы.

2. (**8 баллов**) Распределение баллов:

- Найден максимум функции прибыли фирмы В (или указана соответствующая функция реакции) – **2 балла** (проверка на максимум и указание, что при $q_A \geq 1,5 - t$ выпуск составит $q_B^* = 0$). Если отсутствует проверка на максимум, ИЛИ нет указания на то, что при $q_A \geq 1,5 - t$ выпуск фирмы В нулевой, ИЛИ нет ни того, ни другого, то выставляется **1 балл**;
- Найдены оптимальные параметры q_A^* , q_B^* и t^* – **3 балла** (по **1 баллу** за каждый параметр);
- Найдены прибыли фирм – по **1 баллу** для каждой фирмы;
- Полученный результат прокомментирован (фирма А не будет монопольным производителем, как это было в Пункте 1 задачи) – **1 балл**.

Задание 3. «Системные риски и банковское регулирование» (20 баллов)

В самом упрощенном виде деятельность коммерческих банков представляет собой привлечение депозитов вкладчиков, часть из которых направляется на формирование резервов банка, а часть (вместе с собственными средствами банка) выдается фирмам и домохозяйствам в форме кредитов. По статистике средний срок хранения депозита в банке составляет не более 5 лет, в то время как кредиты могут выдаваться и на более длительный период (так, средний срок ипотечного кредита в России составляет 14,9 лет). Помимо этого, банки, как правило, проводят депозитные и кредитные операции не только в национальной валюте страны, в которой они находятся, но и в некоторых иностранных валютах (например, российский банк может принимать депозиты и выдавать кредиты в долларах или евро). Процентные ставки по депозитам и кредитам при этом определяются банком в момент заключения договора с вкладчиком/заемщиком на основе множества параметров, таких как текущая ситуация на денежном рынке, соотношение активов и пассивов банка и его ожидания относительно макроэкономической ситуации в будущем.

1. (8 баллов) С какими рисками, связанными с хранением депозитов и выдачей кредитов, может столкнуться банк? Каким образом они угрожают его финансовой стабильности?

Ответ. Существуют риски, которые относятся одновременно и к стороне активов, и к стороне пассивов:

- Несоответствие валют активов и пассивов банка. К примеру, банк может выдавать основную массу кредитов в одной валюте и принимать большую часть депозитов в другой. Неожиданное изменение обменного курса между этими двумя валютами может привести к непредвиденному резкому снижению доходов банка (платежей по кредитам), выраженных в той валюте, в которой он несет издержки (платежи по депозитам);
 - Несоответствие сроков платежей. Из-за того что кредиты обычно выдаются на длительный срок, а депозиты принимаются на короткий, а также из-за разной временной структуры платежей процентов банк может столкнуться с нехваткой ликвидности для расчета по своим текущим обязательствам. Иными словами, он может не найти денег для выплаты процентов по депозитам или самих депозитов сейчас, поскольку все средства были размещены в виде кредитов, поступление дохода от которых ожидается в будущем;
 - Несоответствие процентных ставок. Банк может выдавать кредиты на длительный срок по процентной ставке, которая фиксируется на весь период в момент заключения договора. В то же время депозиты обычно выдаются на более короткий срок, и рыночная ставка по новым депозитам может измениться. Неожиданный рост этой ставки приведет к увеличению издержек банка, что в совокупности с невозможностью изменить ставки по выданным ранее кредитам может угрожать его финансовой стабильности.
2. (6 баллов) На практике банки не всегда хорошо контролируют те риски, которые вы перечислили в Пункте 1, и зачастую недооценивают их значимость. Поскольку стабильность финансовой системы страны напрямую зависит от стабильности отдельных агентов, которые в нее входят, регуляторы часто используют специальные

меры финансового регулирования, направленные на снижение банковских рисков. *Предложите три (3) различные меры, которые будут направлены на уменьшение представленных вами в Пункте 1 рисков.* Если вы предложите больше трех мер, засчитаны будут только первые три.

Ответ. Могли быть предложены следующие меры:

- Повышение нормы обязательных резервов. Это приведет к росту резервов коммерческих банков, что снизит риск их банкротства в случае непредвиденных потерь, вызванных реализацией различных рисков;
- Введение страхования вкладов. Эта мера снизит рискованность депозитов и повысит их привлекательность, а также уменьшит риск банковской паники;
- Законодательные ограничения на объем депозитов или кредитов в иностранной валюте. Это поможет банкам минимизировать риски, вызванные колебаниями валютного курса;
- Ограничения на отношение выданных банком кредитов к объему его активов или объему его доходов. Подобные меры юридически запрещают банкам выдавать слишком много кредитов. Таким образом, в случае реализации различных рисков банки потеряют меньше денег, чем в ситуации без ограничений;
- Ограничения на рискованность активов, которыми владеет банк. Регуляторы могут законодательно запретить банкам вкладываться в высокорискованные активы (например, ценные бумаги), что снизит риск невозврата депозитов.

3. *(6 баллов)* Перечислите общие недостатки всех мер регулирования, которые были предложены вами в Пункте 2.

Ответ. Могли быть предложены следующие минусы:

- По аналогии с ограничениями на товарном рынке, ограничения на финансовом рынке ведут к снижению равновесного уровня инвестиций и недофинансированию проектов;
- Возникновение неподконтрольного Центральному банку, но легального теневого банкинга. Регулирование традиционных банков ведет к созданию более сложных финансовых инструментов для обхода этих ограничений, т.е. деньги перетекают в менее контролируемые части финансового рынка;
- Ужесточение регулирования банковского сектора внутри страны создает стимулы для заемщиков занимать деньги за рубежом, где банковский сектор не подвержен такому регулированию и готов кредитовать экономических агентов на более выгодных для них условиях. Такое поведение может создать давление на обменный курс национальной валюты.

Критерии оценивания

1. *(8 баллов)* За каждый из пунктов ставилось **4 балла** при условии полного объяснения механизма. В случае недостаточного обоснования оценка могла быть **снижена на 1–3 балла** в зависимости от степени проработанности аргументации.

Перечисленные в решении выше риски могли быть расписаны только с одной стороны (т.е. только со стороны активов или со стороны пассивов). Например, могло быть указано, что резкий скачок валютного курса приведет к росту расходов банка по валютным депозитам, но при этом связь с кредитами в решении не упоминалась. Аналогично могли быть расписаны и другие пункты из списка. Во всех подобных случаях ставилось по **2 балла** за каждый из выписанных в решении рисков при условии полного обоснования механизма. В случае недостаточного обоснования оценка могла быть снижена до **1 балла**.

Также по **2 балла** ставилось и за другие виды рисков, относящихся только к кредитам или только к депозитам. Например:

- Банковская паника. Вкладчики массово требуют свои вклады назад, что приводит к банкротству банка;
- Вложение банком средств вкладчиков в высокорискованные активы. В погоне за большим доходом банк может инвестировать деньги вкладчиков в рискованные активы, что повышает риск невозврата таких инвестиций и, как следствие, невозможности банка расплатиться по своим обязательствам;
- Массовое банкротство заемщиков.

При этом суммарно в Пункте 1 за риски, относящиеся только к депозитам или только к кредитам, можно было получить **максимум 4 балла из 8**.

Распространенными ошибками являлись следующие виды рисков:

- Риск неожиданной инфляции. Поскольку банк одновременно является и кредитором, и заемщиком, неожиданная инфляция, которая приводит к перераспределению богатства от кредитора к заемщику, не угрожает финансовой стабильности банка;
- Риск невозврата кредита. Это не вызовет серьезных проблем, поскольку банк имеет резервы, а также может продать свои активы достаточно быстро, чтобы расплатиться по обязательствам;
- Риск досрочного снятия депозита. Это не угрожает финансовой стабильности банка по той же причине.

За все перечисленное выше ставилось **0 баллов**.

2. (**6 баллов**) За каждую предложенную меру ставилось по **2 балла** при условии полного описания того, как она поможет снизить риски. При недостаточном обосновании оценка могла быть снижена до **1 балла**. Оценивались только первые три указанные меры.

Частыми ошибками были следующие меры:

- Ужесточение проверки заемщика перед выдачей кредита (скрининга). Эту меру предпринимает сам коммерческий банк, и она не может быть установлена Центральным банком;
- Повышение процентной ставки по кредиту. Процентная ставка определяется равновесием на денежном рынке, а не решением конкретного экономического агента;

- Установление валютного коридора или фиксированного валютного курса. Центральный банк может зафиксировать курс национальной валюты только по отношению к какой-то одной другой валюте, в то время как коммерческие банки могут работать больше чем с одной зарубежной валютой. Кроме того, изменение режима валютного курса влияет на экономику в целом и не является мерой финансового регулирования;
- Таргетирование инфляции. Поскольку инфляция не является основным источником риска, таргетирование не будет подходящей мерой.

За все перечисленное выше ставилось **0 баллов**.

3. (**6 баллов**) За каждый указанный минус ставилось по **3 балла** при условии его полного описания. При недостаточном обосновании оценка могла быть **снижена на 1 или 2 балла** в зависимости от степени аргументированности ответа.

Частыми ошибками были следующие ответы:

- Снижение эффективности монетарной политики из-за снижения денежного мультипликатора. Помимо обязательных резервов, которые на практике почти не используются в качестве инструментов монетарной политики, Центральный банк может регулировать предложение денег, управляя ставкой рефинансирования или проводя операции с государственными облигациями на открытом рынке. По этой причине снижение мультипликатора не создаст значительных проблем для монетарной политики.
- Минусы, которые относятся только к одной или двум мерам, перечисленным в Пункте 2. Согласно формулировке задания, требовалось указать минусы, которые относятся *ко всем* приведенным мерам.

За все перечисленное выше ставилось **0 баллов**.

Задание 4. «Мониторинг» (20 баллов)

Фирма-совершенный конкурент работает на рынке, где цена установилась на уровне p д.е. Производство q единиц продукции обходится фирме в $\frac{q^2}{100}$ д.е. По итогам независимого аудита выяснилось, что доля $x \in (0, 1)$ от всей произведённой фирмой продукции пропадает со склада и не доходит до продажи. В связи с этим фирма приняла решение нанять инспекторов, которые должны контролировать, чтобы произведённая продукция не исчезала со склада. Известно, что во избежание пропажи Y единиц продукции (независимо от совокупного выпуска q), фирме необходимо потратить $\frac{Y^2}{16}$ д.е.

Пример. Допустим, фирма производит $q = 50$ единиц продукции, 40% которой ($x = 0,4$) исчезает со склада. Тогда без дополнительных инспекций до рынка дойдет лишь $(1 - x) \cdot q = 30$ единиц продукции. Если фирма хочет реализовать 38 единиц продукции из 50, она должна предотвратить пропажу $Y = 8$ единиц продукции, затратив при этом $\frac{Y^2}{16} = 4$ д.е.

1. (**16 баллов**) Определите, как объем производства фирмы q зависит от доли пропавшей продукции x и конкурентной цены p при условии использования возможности мониторинга.

Ответ. Запишем функцию прибыли фирмы, выбирающей значения q и Y :

$$\pi(q, Y) = p(q(1 - x) + Y) - \frac{q^2}{100} - \frac{Y^2}{16} \rightarrow \max_{q \geq 0, 0 \leq Y \leq xq}$$

Тогда можно заметить, что прибыль фирмы представляет собой сумму двух парабол относительно q и Y , причем ветви обеих парабол направлены вниз. Следовательно, максимальное значение функции прибыли будет достигнуто при максимальных значениях каждой из двух парабол, т.е. в их вершинах. Вершине первой параболы соответствует $\tilde{q} = 50p(1 - x)$, второй параболы – $\tilde{Y} = 8p$. Обратим внимание, что вершина параболы относительно переменной Y должна лежать в промежутке от 0 до xq (фирме нет смысла предотвращать исчезновение продукции в объеме большем, чем на самом деле пропадает со склада). Таким образом, если $q \leq \frac{8p}{x}$, то вершина параболы окажется правее области определения Y , и вместо $\tilde{Y} = 8p$ фирма выберет ближайшую к ней точку – правую границу области определения $Y = xq$ (т.е. пропажа продукции со склада будет полностью предотвращаться). Это будет происходить при следующих значениях x :

$$50p(1 - x) \leq \frac{8p}{x}$$

$$25x - 25x^2 - 4 \leq 0 \text{ или } 25x^2 - 25x + 4 \geq 0$$

Данное неравенство выполняется при $x \in [0; 0,2] \cup [0,8; 1]$. Значит, для указанных x фирма полностью предотвращает пропажу продукции со склада, и её прибыль имеет вид:

$$\pi(q) = pq - \frac{q^2}{100} - \frac{(xq)^2}{16} \rightarrow \max_{q \geq 0}$$

Это квадратичная парабола с ветвями, направленными вниз, максимум которой достигается в вершине:

$$q^* = \frac{200p}{4 + 25x^2}$$

При x , не принадлежащем найденным выше интервалам, вершина параболы относительно переменной Y будет находиться в границах области определения Y . Значит, объем производства фирмы зависит от величины x следующим образом:¹

$$q^* = \begin{cases} \frac{200p}{4 + 25x^2}, & x \in [0; 0,2] \cup [0,8; 1] \\ 50p(1 - x), & x \in (0,2; 0,8) \end{cases}$$

2. (4 балла) При каком значении x количество фактически исчезнувшей со склада продукции (т.е. величина $(x \cdot q - Y)$ при использовании возможности мониторинга) будет максимальным?

Ответ. Ранее было получено, что при $x \in [0; 0,2] \cup [0,8; 1]$ количество исчезающей со склада продукции равно 0. Однако при $x \in (0,2; 0,8)$ со склада по-прежнему будет исчезать положительное количество продукции, равное разнице между тем, сколько единиц пропало бы без мониторинга (xq), и тем, какое количество продукции фирма смогла сохранить (Y):

$$\text{Исчезло} = xq - Y = 50p(1 - x)x - 8p \rightarrow \max_{0,2 \leq x \leq 0,8}$$

Эта функция представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и принимает максимальное значение в вершине:

$$\hat{x} = 0,5 \in (0,2; 0,8)$$

Таким образом, при $x = \hat{x}$ количество пропавшей со склада продукции будет максимальным.

Критерии оценивания

1. (16 баллов) Баллы распределяются следующим образом:
- Постановка общей задачи оптимизации – **2 балла**;
 - Нахождение оптимального q – **1 балл**;
 - Нахождение оптимального Y – **1 балл**;
 - Обоснование каждого из максимумов (достаточные условия) – по **1 баллу** за каждый максимум;
 - Идея о том, что Y не всегда принадлежит интервалу от 0 до xq , – **2 балла**;
 - Нахождение промежутков для x – **2 балла**;
 - Нахождение всех оптимальных Y – **1 балл**;
 - Обоснование оптимальности найденных Y – **1 балл**;
 - Постановка задачи оптимизации для нахождения q – **1 балл**;
 - Нахождение оптимального q – **1 балл**;
 - Обоснование достаточных условий – **1 балл**;

¹Включение границ в определенные промежутки в итоговом ответе – на усмотрение участника олимпиады.

- Нахождение итогового q при каждом x и p – **1 балл**.
2. (*4 балла*) Баллы распределяются следующим образом:
- Постановка задачи оптимизации – **1 балл**;
 - Указание, при каких значениях x будет достигнут максимум, – **1 балл**;
 - Нахождение \hat{x} – **1 балл**;
 - Обоснование достаточных условий – **1 балл**.

Штрафы

- Арифметическая ошибка при нахождении q ведет к потере **1 балла**;
- Арифметическая ошибка при нахождении Y ведет к потере **1 балла**;
- Арифметическая ошибка при поиске промежутков для x ведет к потере **2 баллов**;
- В случае если функция прибыли записана верно, но было получено $\pi = 0$, вычитается **1 балл**;
- Если в Пункте 2 при записи максимизируемой функции указана переменная Y , но не её оптимальное значение ($8p$), то за весь пункт ставится **0 баллов**.
- Если в Пункте 1 указаны верные значения q как функции от x и p , однако не замечено, при каких x они валидны, то снимается **1 балл** за запись итогового q .
- Если неверно указано направление ветвей параболы, то не ставится **1 балл** за формулировку достаточно условия.

Задание 5. «Рыцари при дворе короля Артура» (20 баллов)

В замке короля Артура есть 2 круглых стола, за которыми рассаживаются рыцари, когда съезжаются на званый обед. Рыцари любят просторно расположиться за столом, но также ценят и дружеское общение. Поэтому если за столом не очень тесно, они предпочтут сидеть в компании других рыцарей, чем оставаться в одиночестве. С другой стороны, если слишком много рыцарей располагаются за одним столом, может быть предпочтительнее переместиться за другой стол. Общее удовольствие, получаемое каждым конкретным рыцарем от посещения званого обеда, зависит от числа рыцарей, сидящих с ним за одним столом, следующим образом:

$$U(n) = n \cdot (13 - n)$$

где n – это число **всех** рыцарей, расположившихся за конкретным столом, включая его самого. В свою очередь король Артур как радушный хозяин заботится о том, чтобы суммарное удовольствие всех его гостей было максимальным, и в случае, когда король Артур рассаживает рыцарей самостоятельно, он максимизирует именно эту величину. Можно считать, что рыцари знают количество приглашенных на званый обед; они съезжаются в замок по-одному, но в процессе могут пересаживаться из-за одного стола за другой. Если рыцарь игнорирует приглашение короля Артура и не приходит на званый обед, он получает нулевое удовольствие от посещения данного мероприятия.

Распределение рыцарей по столам считается **устойчивым**, если ни у одного рыцаря (или группы рыцарей) нет стимула его нарушить. *При каком количестве рыцарей распределение их по столам будет **устойчивым** и **одинаковым** вне зависимости от того, рассаживались ли они сами или же их распределил по столам король Артур?*

Ответ. Заметим, что если приглашено больше, чем 26 рыцарей, то задача становится неинтересной, поскольку все гости и король Артур получают отрицательное удовольствие от посещения званого обеда. Поэтому будем считать, что численность рыцарей больше 0 и меньше 26.

Рассмотрим, как рыцари будут рассаживаться самостоятельно.

1. Если приглашенных меньше 7, то все они будут стремиться сесть за один стол, поскольку удовольствие каждого из них $U(n)$ возрастает при $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$;
2. Если рыцарей ровно 7, то они также предпочтут сидеть за одним столом, поскольку удовольствие каждого при $n = 7$ такое же, как и при $n = 6$:

$$U(6) = U(7) = 42$$

3. Если рыцарей 8 и они размещаются за одним столом, то какая-то часть приглашенных (6 или 7 рыцарей) захочет пересесть, желая получить большее удовольствие. Однако оставшиеся за столом рыцари также захотят присоединиться к отделившейся компании, поскольку находиться за столом одному или вдвоем невыгодно. Таким образом, если приглашенных рыцарей 8, то любое распределение будет неустойчивым.
4. В случае с 9 рыцарями ситуация будет аналогичной. Если все приглашенные размещаются за одним столом, то группа из 5 и более рыцарей захочет отделиться ($U(5) = 40 > 36 = U(9)$). Тогда каждый из оставшихся за первым столом рыцарей пожелает присоединиться к большинству, поскольку став, например, 6м вместо

4го, он получит большее удовольствие от посещения званого обеда. Иначе говоря, распределение будет неустойчивым.

5. Аналогично доказывается, что если рыцарей 10 или 11, любое распределение их по столам неустойчиво. Сесть одному за второй стол имеет смысл, только если за первым столом рыцарь будет 12м:

$$U(12) = U(1) = 12$$

Получается, что 12му рыцарю безразлично, присоединиться к остальным приглашенным за первым столом или же разместиться одному за вторым столом. Но если он сядет за второй стол, то тогда 11му рыцарю также станет безразлично, сидеть ли со всеми за первым столом или же переместиться за второй стол ($U(11) = 22 = U(2)$). Аналогично, если 11й рыцарь пересядет, то тогда 10му станет все равно, быть 10м за первым столом или же 3м за вторым столом, и т.д. Таким образом, в случае 12 приглашенных есть несколько устойчивых рассадок: 12:0, 11:1, 10:2, 9:3, 8:4, 7:5, 6:6 – и максимальное удовольствие достигается в случае 6:6.

6. Если рыцарей 13, то они точно не сядут за один стол, поскольку тогда удовольствие каждого будет нулевым. Следовательно, хотя бы один рыцарь сядет за второй стол. Поскольку функция удовольствия каждого приглашенного возрастает до $n^* = 6,5$ и убывает после $n^* = 6,5$, то рыцарям выгодно уменьшать численность за первым столом и увеличивать за вторым, пока не будет достигнуто соотношение 7:6.
7. Если рыцарей не меньше 14, то они будут рассаживаться так, чтобы численность за столами была примерно равной.

В итоге:

- Если рыцарей не более 7, то они предпочтут сесть за один стол;
- Если число рыцарей 8, 9, 10 или 11, то возможны различные рассадки, но они будут неустойчивыми;
- При 12 рыцарях есть несколько устойчивых распределений, при этом рассадка поровну дает максимальное удовольствие каждому рыцарю;
- Если рыцарей 13 и более, то они постараются распределиться поровну между столами.

Теперь рассмотрим, как будет рассаживать рыцарей король Артур. Если он размещает рыцарей за два стола, то максимизируется следующая функция:

$$\max_{n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_1 + n_2 = N} \{A(n_1, n_2) = A_1(n_1) + A_2(n_2) = n_1^2(13 - n_1) + n_2^2(13 - n_2)\}$$

где N – это общее число рыцарей, а n_1, n_2 – число рыцарей за первым и вторым столом соответственно. Выразив n_2 через n_1 из ограничения $n_1 + n_2 = N$, получаем функцию от одной переменной n_1 и параметра N :

$$\max_{n_1 \geq 0} \{A(n_1, N) = n_1^2(13 - n_1) + (N - n_1)^2(13 - N + n_1)\}$$

Эта функция является квадратичной (слагаемые с n_1^3 сократятся), следовательно, у нее существует внутренний максимум или минимум, что зависит от коэффициента при старшей степени $\{26 - 3N\}$:

- Если данный коэффициент положительный, то у функции есть максимум;
- Если же он отрицательный, то минимум.

То же самое можно увидеть, если взять производную этой функции по n_1 :

$$A'(n_1, N) = (2n_1 - N)(26 - 3N)$$

Отсюда следует, что если число рыцарей больше, чем $N = \frac{26}{3}$, то максимум функции достигается при $n_1^* = n_2^* = \frac{N}{2}$, то есть приглашенные будут распределены между столами поровну. Если же общее число рыцарей меньше, чем $N = \frac{26}{3}$, то их нужно разместить за один стол: $n_1^* = 0$, $n_2^* = N$. Для решения задачи в целых числах нужно перебрать целые значения больше и меньше точки $N = \frac{26}{3}$. В итоге, получим следующий результат:

- Если рыцарей не больше 8, то король Артур будет сажать их за один стол (его удовольствие максимально при $N = 8$: $A(8, 8) = 8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$);
- Если рыцарей 9 и более, то король Артур будет рассаживать их за два стола примерно поровну (так, при $N = 9$ его удовольствие будет составлять $A(5, 9) = 5 \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 344$).

Для сравнения: если бы Артур посадил 9 рыцарей за один стол, то его удовольствие составило бы только $A(9, 9) = 9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$, а если бы 8 приглашенных были равномерно размещены за двумя столами, то удовольствие короля Артура достигло только $A(4, 8) = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 = 288$.

Сопоставляя решения короля Артура и рыцарей, получаем, что исходы будут устойчивыми и одинаковыми вне зависимости от того, разместились ли рыцари сами или же их распределил по столам король Артур, если число рыцарей **не более 7** (тогда все разместятся за одним столом) или когда их **не менее 13** (тогда они сидят за двумя столами примерно поровну). Если рыцарей **12**, то хотя они могут сесть по-разному, у приглашенных также не будет стимула пересесть, когда Артур рассадит их поровну за два стола. Если же число рыцарей **от 8 и до 11**, то король Артур захочет рассадить их за два стола примерно поровну, тогда как приглашенные будут стараться нарушить такое распределение, поскольку при этом числе рыцарей любая рассадка неустойчива. В итоге, получаем $N \in (0, 7] \cup [12, 26)$.

Комментарий. Ответ $N \in (0, 7] \cup [13, 26)$ также засчитывается как правильный, поскольку случай 12 рыцарей можно трактовать по-разному.

Критерии оценивания

Общие правила

- Допускаются штрафы за недочеты или неполные штрафы, если ошибка совершена лишь частично.
- Наличие **не более двух (2)** недочетов в решении штрафуются от **0 до 1 баллов** за недочет. Если в решении имеются **более двух (2)** недочетов, то каждый из них учитывается со штрафом в **1 балл**.
- Наличие **не более двух (2)** существенных ошибок приводит к потере от **5 до 10 баллов**. Если таких ошибок **больше двух (2)**, то сумма штрафа может увеличиваться.

- Наличие **не более двух (2)** недочетов и ошибок приводит к штрафу в 10–15 баллов и больше.

Приведенные ниже критерии позволяют получить баллы, если они упомянуты в работе, и вычитаются из общей стоимости задачи, если не упомянуты.

Распределение баллов:

- Ограничение исследуемого множества: число рыцарей больше 0 и меньше 26 – **1 балл**. Балл ставится, если участник рассмотрел случаи 0 рыцарей и более 26 рыцарей.
- Анализ функции рыцаря:
 - Утверждения о том, что удовольствие рыцаря – это квадратичная функция, корни которой – $n = 0$ и $n = 13$, а график – парабола с ветвями, направленными вниз, – **2 балла**;
 - Исследование участков монотонности функции $U(n)$: $n \leq 6,5 \Rightarrow$ функция возрастает, $n > 6,5 \Rightarrow$ функция убывает, а максимум при целочисленных значениях достигается в точках $n^* = 6$ и $n^* = 7$ – **2 балла**;
 - Доказательство неустойчивости рассадки для 8, 9, 10 и 11 рыцарей – **3 балла**;
 - Доказательство того, что в случае более чем 11 приглашенных рассадка будет симметричной или почти симметричной (различие не более, чем в 1 человека), – **2 балла**.
- Анализ функции короля Артура:
 - Формализация задачи Артура как функции двух аргументов и постановка задачи максимизации с ограничением в виде равенства – **2 балла**;
 - Сведение задачи Артура к максимизации квадратичной функции с параметром N – **2 балла**;
 - Разделение случаев, когда общее число рыцарей больше или меньше $N = \frac{26}{3}$ – **2 балла**;
 - Запись решения Артура о рассадке рыцарей для указанных случаев – **2 балла**;
 - Сопоставление решений Артура и рыцарей – **2 балла**;
 - Запись ответа на поставленный вопрос – **1 балл**.

Штрафы

- Если указанные выше пункты описаны лишь частично, то ставится **1 балл**;
- Отсутствие ограничения области исследования и запись окончательного ответа оцениваются в **0 баллов**, частичное указание данных пунктов рассматривается как недочет;
- Если количество существенных недочетов в задаче 3 и больше, то за каждый недочет снимается **1 балл**.