Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

11-1.Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc+a+b+c = 10$, $ab+bc+ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

Ответ: 1.

Первое Решение. Обозначим $a + b + c = \lambda$. Теорема Виета позволяет написать кубическое уравнение, зависящее от параметра λ, корнями которого является набор a, b, c, соответствующий данному λ. А именно (переменная обозначена через t ибо x уже занято):

$$t^3 - \lambda t^2 + 9t - (10 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t - 1)(t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda)) = 0.$$

Отсюда уже видно, при любом λ есть корень $t = 1$, то есть значение $x = 1$ подходит. Осталось доказать, что нет других значений, являющихся корнями при любом λ (хотя это и так очевидно). В самом деле, $t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda) = 0$ означает $t = \dfrac{\lambda - 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 39}}{2}$. Возьмем любую пару значений λ, при которой дискриминант принимает одно и то же положительное значение, например при $\lambda = 10$ и $\lambda = -12$ имеем $t \in \{0, 9\}$ и $t \in \{-11, -2\}$ – пересечений нет. Итак, ответ $x = 1$.

Второе решение. Вычтем из первого равенства второе, преобразовав, получим $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$. Отсюда следует, что одно из a, b, c равно единице. Другие x не подходят, так как тройки $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ и $(a, b, c) = (0, 9, 1)$ удовлетворяют условию.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Не доказано, почему нет других x, кроме 1 или есть незначительная ошибка в доказательстве
$+/-$	16	Значительные ошибки в доказательстве (несколько переходов с делением на возможно нулевые, непонимание условия (при наличии необходимых для доказательства вычислений))
$-/+$	10	Рассмотрены два частных случая, которые показывают, что x может быть равно только 1. Но доказательства того, что $x = 1$, нет
$-.$	6	Найден только один случай $(1, 1, 4)$ или $(0, 1, 9)$ и утверждается, что $x \in \{1, 4\}$ или $x \in \{0, 1, 9\}$
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

11-2.Мистер A час простоял в точке с координатами $(0, 0)$. За этот же час, двигаясь равномерно и прямолинейно, мистер B дошел от точки $(22, 0)$ до точки $(2, 20)$. За этот же час мадемуазель C, тоже двигавшаяся равномерно и прямолинейно, прошла от точки $(30, 4)$ до точки $(0, 24)$. Сколько раз за указанный период наблюдения принимала целые значения площадь треугольника ABC? Начальный и конечный момент включаются.

Ответ: 53.

Решение. Неформально говоря, проблема в этой задаче не в том, чтобы найти путь вычислений, приводящий к ответу; а в том, чтобы найти путь к ответу, проходящий через не слишком большое количество промежуточных вычислений. Покажем, как это сделать.

Как известно, площадь треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{(x_1, y_1)}$ и $\overrightarrow{(x_2, y_2)}$ равна $|\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)|$. Если точка $\overrightarrow{(x, y)}$ движется равномерно и прямолинейно, то ее координаты зависят от времени t как $x = x_0 + x't$, $y = y_0 + y't$. Тогда величина $f(t) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ как функция от t является многочленом второй степени. Выберем ось времени так, чтобы ноль был в середине отрезка наблюдения, а начальный и конечный моменты имели координаты -1 и 1 соответственно. Обозначим $f(t) = ax^2 + bx + c$. Координаты точек B и C в середине отрезка наблюдения легко считаются, это $(12, 10)$ и $(15, 14)$ соответственно. Итак, $f(-1) = \dfrac{1}{2}(22\cdot 4 - 30\cdot 0) = 44$, $f(0) = \dfrac{1}{2}(12 \cdot 14 - 15 \cdot 10) = 9$, $f(1) = \dfrac{1}{2}(2 \cdot 24 - 0 \cdot 20) = 24$. Откуда $c = f(0) = 9$, $b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} = -10$, $a = \dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} = 25$. Минимум квадратного трехчлена достигается в точке $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{5}$; $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = 8$. Итак, мы видим, что минимум выражения $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ попал на отрезок наблюдения, кроме того он положителен, то есть модуль равен выражению под модулем. Итого, искомая площадь сначала уменьшалась от 44 до 8, потом росла от 8 до 24, таким образом принимая целые значения $1 + (44 - 8) + (24 - 8) = 53$ раза.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	17	Только арифметическая ошибка. Игнорируется повторное прохождение той же целой площади.
+/2	15	Верно найдена формула для S(t) ($100t^2 - 120t + 44$ или $44 - 2t + t^2/36$ или $t^2/4 - 6t + 44$), или $2S$, дальнейшие рассуждения отсутствуют
−/+	10	Идея непрерывности, дающая только оценку снизу (найдены значения в начальный и конечный момент, посчитана разность между ними) или арифметическая ошибка при вычислении формулы для $S(t)$
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

11-3.Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

Ответ: $2n + 6$ при $n \geq 2$, 6 при $n = 1$.

Решение. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника – она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по 120°.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами – которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника – она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по 120°.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами – которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками.

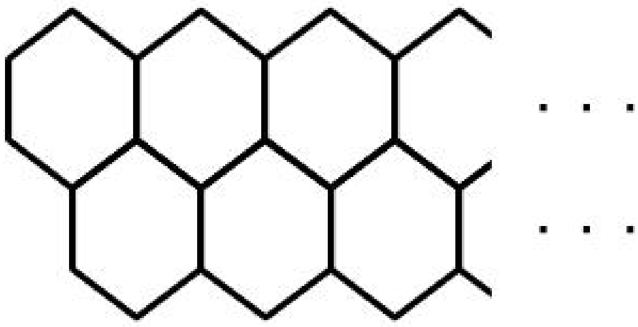

Рис. 1: Пример многоугольника, сделанного из шестиугольников.

Таким образом, мы получили изображение *мультиграфа* на плоскости. Для него верна *формула Эйлера* $F - E + V = 2$, где F, E, V – количество граней, ребер и вершин соответственно. Поскольку все вершины имеют степень 3, $3V = 2E$. Кроме того $F = n + 1$, поскольку это все шестиугольники и внешняя грань. Из этих трех уравнений выводится $E = 3n - 3$. Пройдем по внешнему циклу. При этом мы шли по всем n шестиугольникам, значит при $n > 1$ не менее чем n раз меняли шестиугольник, по которому идем (внимание: этот утверждение не верно если $n = 1$: так и ходили по одному шестиугольнику, ни разу его не поменяв). Значит, во внешнем цикле не менее n ребер, значит в остальном графе не больше $2n - 3$ ребер. Каждое из них состоит ровно из одного отрезка, бывшего стороной для двух шестиугольников, поскольку внутри многоугольника не может быть точек, являющихся концами ровно для двух отрезков сторон. Значит, внутри не больше $4n - 6$ сторон шестиугольников, склеенных по парам, значит на границе лежит не менее $2n + 6$ сторон.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	18	Незначительные ошибки в доказательстве
+/−	10	Серьезные пробелы в доказательстве (например, не доказано существование шестиугольника, касающегося других не более чем по 2 сторонам)
+/2	6	Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует. Пример есть.
−/+	4	Есть пример на $2n + 6$ или имеются идеи, как в критерии +/2, но нет внятного примера.
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

11-4. Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Решение *(на языке тригонометрии)*. Достаточно доказать, что

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1} \cdot \frac{C_0B_1}{A_0B_1} \cdot \frac{A_0C_1}{B_0C_1} = 1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Пусть без ограничения общности прямая a пересекает внутренность треугольника ABC. Обозначим углы треугольника через α, β, γ, а угол B_0AA_1 через ϕ. Тогда углы AC_0A_1 и AB_0A_1 равны β и γ соответственно.

Применяя теорему синусов к треугольникам AB_0A_1 и AC_0A_1, получаем

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1} = \frac{\sin A_1AB_0}{\sin A_1AC_0} \cdot \frac{\sin AC_0A_1}{\sin AB_0A_1} = \frac{\sin\phi}{\sin(\alpha-\phi)} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Аналогично, пользуясь равенством вертикальных углов, получаем

$$\frac{C_0B_1}{A_0B_1} = \frac{\sin B_1BC_0}{\sin B_1BA_0} \cdot \frac{\sin BA_0B_1}{\sin BC_0B_1} = \frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha+\beta-\phi)} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

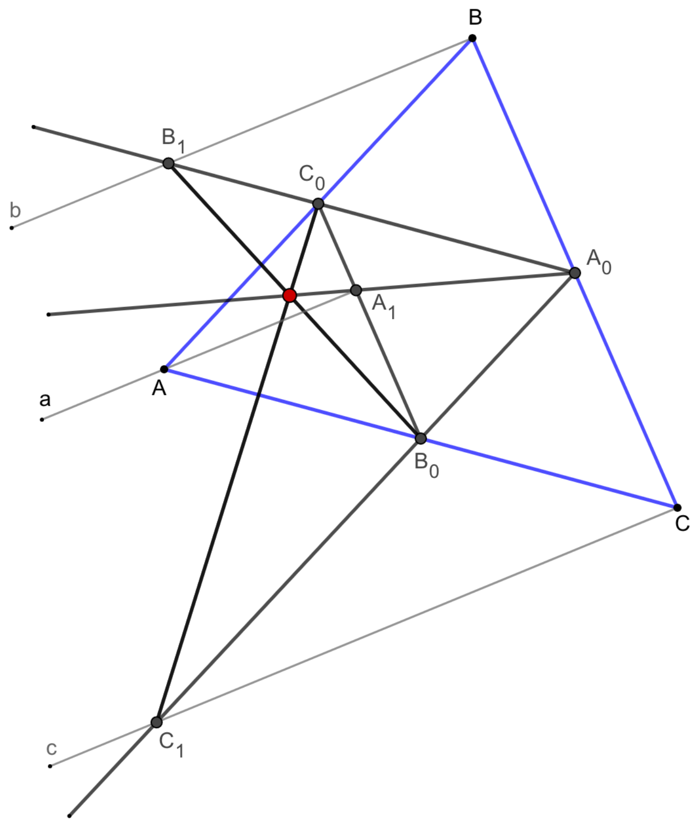

Рис. 2: Пример чертежа, если прямая a проходит "внутри"треугольника ABC.

Аналогично

$$\frac{A_0C_1}{B_0C_1} = \frac{\sin(\gamma+\phi)}{\sin\phi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Т.к. $\alpha+\beta-\phi = \pi-(\gamma+\phi)$, то при перемножении трех выписанных равенств все члены сократятся и мы получим 1.

Другая запись того же решения (на языке проективной геометрии). *Простым отношением* трех точек P, Q, R на одной прямой назовем такое число x, что $\overrightarrow{PQ} = x\cdot\overrightarrow{PR}$. Обозначим $x = \overrightarrow{PQ}/\overrightarrow{PR}$.

Достаточно доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}} = -1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Двойным отношением прямых p, q, r, s назовем число $(p,q;r,s) = \pm\frac{\sin\angle(p,r)}{\sin\angle(p,s)}\cdot\frac{\sin\angle(q,r)}{\sin\angle(q,s)}$, где знак "$+$" берется, если r и s расположены в одной паре вертикальных углов относительно p и q, а знак "$-$" — иначе. Проведем через вершины треугольника A, B, C прямые p, q, r, параллельные противоположным сторонам a', b', c' треугольника ABC. Тогда, как известно, $\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}}$ равно двойному отношению прямых $(a, p; c', b')$. Аналогично $\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}}$ и $\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}}$ равны двойным отношениям $(b, q; a', c')$ и $(c, r; b', a')$. Но из параллельности

$$(a, p; c', b') = (a, a'; c', b'), (b, q; a', c') = (a, b'; a', c'), (c, r; b', a') = (a, c'; b', a').$$

Остается доказать, что

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = -1.$$

Здесь участвуют двойные отношения одной и той же четверки прямых, но взятых в разных порядках. Обозначим $x = (a, a'; c', b')$. Известно, что при перестановке прямых c' и b' двойное отношение заменяется на $1/x$, а при перестановке прямых a' и b' — на $1 - x$. Значит, $(a, b'; a', c') = 1/(1 - x)$ и $(a, c'; b', a') = 1/(1 - 1/(1 - x))$. Получаем

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = x \cdot 1/(1 - x) \cdot 1/(1 - 1/(1 - x)) = -1,$$

что и требовалось.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
−.	4	Использование аффинного преобразования (показано, что так можно), дальше ничего
−	0	Решение полностью неверно

11-5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовем областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что замена переменной $x \to x + k$ при любом целом k не меняет области значений многочлена. Тогда, сделав замену $x \to x - [\frac{p}{2}]$ (квадратные скобки означают целую часть) можем считать, что любой многочлен имеет один из двух видов: $x^2 + q$ или $x^2 + x + q$.

Области значений любых двух многочленов разного вида пересекаются: в самом деле, значения многочленов $x^2 + q$ и $x^2 + x + q'$ совпадают при $x = q - q'$. Значит, многочлены разного вида брать нельзя.

Многочленов первого вида можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + q$ и $f_2(x) = x^2 + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 4k + 2$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для нечетной разности свободных членов $q - q' = 2k + 1$ имеем $f_1(k) = f_2(k + 1)$. Для делящейся на 4 разности свободных членов $q - q' = 4k$ имеем $f_1(k-1) = f_2(k+1)$. Но если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна не имеет вид $4k+2$.

Многочленов второго вида тоже можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + x + q$ и $f_2(x) = x^2 + x + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 2k+1$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для четной разности свободных членов $q - q' = 2k$ имеем $f_1(k-1) = f_2(k)$. Опять же, если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна четна.

Итак, больше двух многочленов выбрать нельзя. Пример для двух: $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = x^2 + 2$.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	18	Решение верно по модулю небольших неточностей
+/−	14	Есть доказательство того, что для каждого типа значений (x^2+q и x^2+x+q) можно взять не более двух трёхчленов
−/+	8	Полное решение, но только для случая x^2+q
−.	4	Пример двух трёхчленов, у которых области значений не пересекаются
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

11-6.Последовательность чисел $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$ называется перестановкой длины n, если каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается в этой последовательности ровно один раз. Например, $\tau(1) = 3, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1$ – перестановка длины 3. Найдите все n, для которых найдется перестановка $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$, удовлетворяющая четырем условиям:

- Числа $\tau(i) - i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 2i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 3i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 4i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.

Ответ: все n, не делящиеся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

Решение. Будем решать чуть обобщенную задачу, а именно: зафиксируем натуральное m и будем искать все n, для которых в любом из m множеств $\{\tau(i) - ji | 1 \leq i \leq n\}$ все остатки различны. Индекс j пробегает значения $1 \leq j \leq m$.

Для начала докажем, что все n, не делящиеся на простые числа меньшие либо равные $m+1$, подходят. Рассмотрим перестановку $\tau : i \to (m+1)i \mod n$ (здесь мы позволим себе вольность считать, что остатки идут от 1 до n, а не от 0 до $n-1$ как обычно). Поскольку n взаимно просто с $m+1$, остатки не повторяются. Значит, по принципу Дирихле, каждый остаток встречается ровно один раз. Аналогично, каждый остаток встречается ровно один раз и в каждом из множеств $\{\tau(i)-i| 1 \le i \le n\}, \{\tau(i)-2i| 1 \le i \le n\}, \dots, \{\tau(i)-mi| 1 \le i \le n\}$.

Докажем, что перестановки с требуемыми свойствами не существует если $n \vdots p$, $p \le m+1$. Предположим обратное, зафиксируем наименьшее такое p и обозначим через k максимальную степень p, на которую делится n.

Сперва рассмотрим случай $p=2$. Заметим что $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, формула легко доказывается по индукции. Тогда сумма n чисел, дающих остатки $1, 2, \dots n$ по модулю n сравнима с $\frac{n(n+1)}{2}$ по модулю n. Посчитаем двумя способами остаток суммы $\sum_{i=1}^n \tau(i) - i$ по модулю n. С одной стороны, все слагаемые дают разные остатки, значит сумма $\frac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, по тем же соображениям у суммы отдельно $\sum_{i=1}^n \tau(i)$ такой остаток, и у суммы $\sum_{i=1}^n i$ такой же, значит их разность имеет остаток 0. Заметим, что $\frac{n(n+1)}{2} \not\equiv 0 \mod n$, поскольку $n+1$ нечетное а $\frac{n}{2}$ не делится на 2^k. Предположение приведено к противоречию.

Попробуем получить решение в том же духе для произвольного p. Небольшой догадкой, которую нужно сделать на этом этапе решения, будет то, что считать надо сумму $p-1$-х степеней. Слабой подсказкой в эту сторону является то, что $p-1=1$ для двойки $p=2$, и в этом же случае сработал подсчет суммы первых степеней. Гораздо более сильной – то что $p-1$-е степени по модулю p ведут себя просто – это 1 если число не равно нулю, 0 если равно.

Итак, далее считаем что $p>2$ обозначим

$$S(m) = \sum_{i=1}^m i^{p-1}$$

Лемма 1 *$S(n) \vdots p^{k-1}$ и $S(n) \not\vdots p^k$.*

Достаточно доказать этот факт для $n = p^k$, поскольку $S(n) \equiv \frac{n}{p^k} S(p^k) \mod p^k$. Для $S(p^k)$ проведем индукцию по k. При $k=1$ утверждение следует из Малой теоремы Ферма: среди слагаемых $p-1$ единица и один ноль. Пусть доказано для k, докажем для $k+1$.

$$S(p^{k+1}) = \sum_{i=1}^{p^{k+1}} i^{p-1} = \sum_{i=1}^{p^k} \sum_{j=0}^{p-1} (i+jp^k)^{p-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p^k} \sum_{j=0}^{p-1} \left(i^{p-1} + (p-1)jp^k i^{p-2}\right) \equiv \sum_{i=1}^{p^k} \left(i^{p-1}p + i^{p-2}p^k \frac{p(p-1)^2}{2}\right) \equiv pS(p^k). \quad (1)$$

Все сравнимости по модулю p^{k+1}.

Теперь для каждого $j:\ 1 \le j \le p-1$ рассмотрим сумму

$$S_j(n) = \sum_{1\le i\le n} (\tau(i) - ij)^{p-1}.$$

Раскроем все степени по биному Ньютона, получим слагаемые вида

$$\binom{p-1}{s}(-j)^s \sum_{1\le i\le n} \tau(i)^{p-1-s} i^s.$$

С другой стороны, все члены в $S_j(n)$ – это переставленные в каком-то порядке остатки по модулю n членов суммы $S(n)$, то есть $S_j(n) \equiv S(n) \mod n$. Итак, мы хотим найти такой набор α_j, чтобы домножив на него сравнимости $S_j(n) \equiv S(n)$ и сложив мы смогли бы прийти к противоречию. Сделать это поможет лемма:

Лемма 2 *Существуют такие целые числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$, *что*

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 2 + \dots + \alpha_{p-1}(p-1) \equiv 0 \mod p^k$$

$$\alpha_1 1^2 + \alpha_2 2^2 + \dots + \alpha_{p-1}(p-1)^2 \equiv 0 \mod p^k$$

$$\dots$$

$$\alpha_1 1^{p-2} + \alpha_2 2^{p-2} + \dots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-2} \equiv 0 \mod p^k$$

$$\alpha_1 1^{p-1} + \alpha_2 2^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-1} \not\equiv 0 \mod p$$

Сначала покажем, как из этой леммы вывести оставшуюся часть утверждения задачи. Рассмотрим сравнимость

$$\alpha_1 S_1 n + \alpha_2 S_2 n + \dots + \alpha_{p-1} S_{p-1}(n) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{p-1}) S \mod p^k$$

С одной стороны, если раскрыть все S_j по биному Ньютона, и собрать вместе члены вида $\tau(i)^{p-1-s} i^s$, $1 \le s \le p-2$, то по Лемме 2 перед каждым членом коэффициент, равный нулю по модулю p^k.

$$\alpha_1(\sum_{i=1}^n \tau(i)^{p-1} + i^{p-1}) + \alpha_2(\sum_{i=1}^n \tau(i)^{p-1} + (2i)^{p-1}) + \dots + \alpha_{p-1}(\sum_{i=1}^n \tau(i)^{p-1} + ((p-1)i)^{p-1}) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1}) S(n).$$

Вспомнив, что $\sum_{i=1}^n \tau(i)^{p-1} = S(n)$ видим, что все члены вида $\tau(i)^{p-1}$ сократились с правой частью, итак

$$\alpha_1 \sum_{i=0}^n i^{p-1} + \alpha_2 \sum_{i=0}^n (2i)^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} \sum_{i=0}^n ((p-1)i)^{p-1} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\big(\alpha_1 1^{p-1} + \alpha_2 2^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-1}\big) S(n) \equiv 0$$

Но первая скобка не делится на p по Лемме 2, а $S(n)$ не делится на p^k по Лемме 1.

Осталось доказать лемму 2. Сперва отметим, что если вместо набора целых чисел α_j удалось подобрать набор рациональных чисел β_j, таких что их знаменатели не делятся на p, все сравнимости из условия леммы заменились на равенства, а последнее выражение равно целому числу, не делящемуся на p – то лемма доказана, достаточно все β_j заменить на сравнимые с ними по модулю p^k целые числа. Сравнимость определена корректно поскольку знаменатели не делятся на p.

Теперь осталось взять $\beta_j = (-1)^j \frac{1}{j}\binom{p-2}{j-1}$. Читателю остается упражнение доказать (например, по индукции, поскольку простота p здесь уже не важна), что во всех условиях Леммы 2, кроме последнего, получается 0, а в последнем $\pm(p-2)!$.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$-/+$	12	Найден пример, работающий для всех n, не делящихся на $2, 3$ и 5.
$-.$	8	Доказано, что n — нечётное
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ