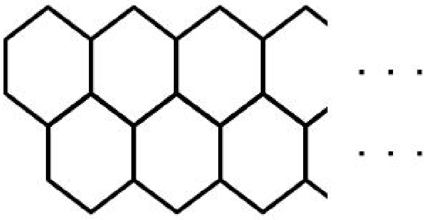
Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 8-1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу. Сколько шестиугольников у него получится?



Ответ: 504.

Решение. Будем считать, что Вася работает по следующей схеме. Сначала выкладывает крайний левый шестиугольник, а потом подклеивает пару шестиугольников к имеющимся. Тогда после выкладывания k-й пары будет потрачено $6+9+8(k-1) = 8k+7$ спичек. Таким образом, он сможет использовать 2015 спичек, сделав при этом 503 шестиугольника. А из оставшихся четырёх спичек он сделает 504-й шестиугольник. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Арифметическая ошибка, не влияющая на решение
$+/-$	14	Решение верное, но в ответе забыто, что за неизвестную взято 2 шестиугольника. Незначительная ошибка в рассуждениях
$+/2$	10	При правильном ответе пробелы в решении
$-/+$	6	Множественные арифметические ошибки
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-2. Вычислите сумму $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2$.

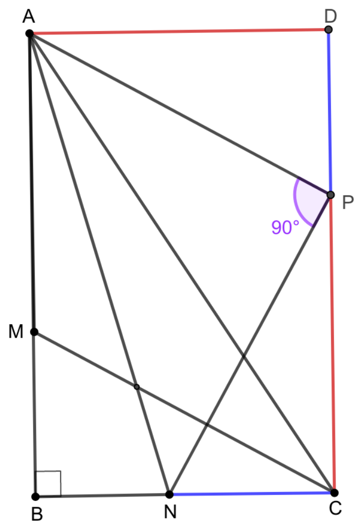
Ответ: 4074341.

Решение. Заметим, что при любом k верно равенство $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$. Поэтому вся сумма равна $1+504\cdot4+2018^2=4074341$. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Решение верное, но присутствуют недочёты, не влияющие на решение или не досчитано до конечного числа
+/−	17	Арифметическая ошибка при правильных рассуждениях
+/2	12	Правильная идея с ошибками
−/+	8	Описание метода подстчета без самого подсчета или множественные ошибки
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM=BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN=MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

Ответ: 45°.



Решение. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$ и выберем на его стороне CD точку P так, что AP параллельно CM. Тогда $PC=AD, DP=CN$, и прямоугольные треугольники ADP и CPN равны, причём $\angle DAP=\angle CPN$. Поэтому $\angle APD+\angle CPN=90^\circ$ и

$\angle APN = 90°$, то есть APN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle PAN = 45°$ и, в силу параллельности прямых AP и CM, острый угол между прямыми AN и CM тоже составляет 45 градусов. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-4. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

Ответ: 3.

Решение. За три вопроса можно получить ответ следующим образом. Первые два вопроса про черепах 1 и 2, про 2 и 3. Если хотя бы один из ответов 0 или 2, про соответствующую пару знаем, кто они, про оставшуюся из трёх знаем из другого вопроса, остался 1 вопрос на 4-ю черепашку. Если оба ответа 1, то черепашки 1 и 3 одного пола. Тогда спросим про 1, 3, 4. Мы услышим ответ не меньше 2, если черепашки 1 и 3 были самцами, и ответ не больше 1 иначе. При этом пол черепашки 4 также однозначно восстанавливается, и остается одним вопросом выяснить пол черепашки 2.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Прежде всего заметим, что: а) за один вопрос, не зная общего числа самцов, мы не сможем разобраться даже с двумя черепашками; б) зная общее число самцов, мы сможем разобраться с двумя, но не сможем разобраться с тремя черепашками. Поэтому в ситуации четырёх черепашек и двух вопросов задавать первый вопрос про всех черепашек сразу или про одну черепашку бессмысленно. Поскольку при вопросе про группу из трёх или двух черепашек мы можем услышать ответ 1, такой вопрос также не приведёт к успеху. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Верный ответ, но не доказано, что меньше быть не может
+/2	10	Верный ответ с мелкими недочетами в решении и не доказано, что меньше быть не может
−.	4	Попытка проанализировать случаи с 2 и 3 вопросами, но сделан неверный вывод, что минимальное число — 4
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-5. **8-5.** Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

Ответ: 12 (2, 3, 4, 6).

Решение. Имеет место один из двух случаев.

А) Пусть оба наименьших делителя p и q — простые числа. Тогда простым будет число $r = (n/p + n/q) - (p + q)$, и $pqr = (p + q)(n - pq)$. Поскольку числа $p + q$ и pq взаимно просты, получаем $r = p + q$, откуда $p = 2$ и $n = 4q$. Но тогда в силу выбора q получаем $q = 3$ и $n = 12$.

Б) Пусть наименьшие делители имеют вид p и p^2, где p простое. Этот случай разбирается аналогично. □

Замечание. Возможна ситуация, когда число имеет всего три собственных делителя. Тогда упомянутая в условии разность есть разность между наибольшим и наименьшим из собственных делителей. Но любое число с тремя собственными делителями есть степень простого p^4, а разность $p^3 - p$ простым числом быть не может.

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+.$	16	Незначительные ошибки
$+/2$	10	Значительные пробелы в решении
$-.$	6	Есть идея, что $pnq = (p+q)(n-pq)$
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

Ответ: да.

Решение. Возьмём набор монет A суммарной стоимостью 51 тугрик. Докажем, что A состоит из одной монеты стоимостью 51 тугрик. Тогда останется прибавить ее к набору в 49 тугриков. Пусть k тугриков — стоимость самой дешевой монеты набора A. Если $k < 51$, то найдется набор монет В суммарной стоимостью $k-1$ тугрик. Ясно, что все монеты набора B дешевле k тугриков, поэтому все они не входят в набор A. Уберем из набора A одну монету стоимостью k тугриков и добавим туда все монеты набора B. Таким образом, мы набрали ровно 50 тугриков, противоречие. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+/-$	14	Доказано, что можно. Приведён конкретный пример, но не в общем случае или незначительные пробелы в доказательстве
$-/+$	10	Идея о монете в 51 тугрик
$-.$	6	Частный случай
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ