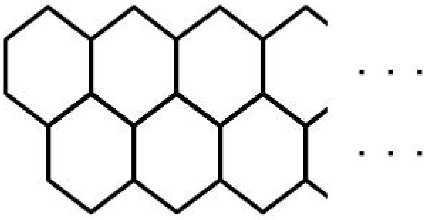
Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 7-1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу. Сколько шестиугольников у него получится?



Ответ: 504.

Решение. Будем считать, что Вася работает по следующей схеме. Сначала выкладывает крайний левый шестиугольник, а потом подклеивает пару шестиугольников к имеющимся. Тогда после выкладывания k-й пары будет потрачено $6+9+8(k-1) = 8k+7$ спичек. Таким образом, он сможет использовать 2015 спичек, сделав при этом 503 шестиугольника. А из оставшихся четырёх спичек он сделает 504-й шестиугольник. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	15	Арифметическая ошибка
+/−	10	Решение верное, но в ответе забыто, что за неизвестную взято 2 шестиугольника
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-2. Двадцать шесть целых чисел $a, b, c, \dots, z$ подобраны таким образом, что $(1+ab)(1+abc)\dots(1+abc\dots z) = 0$. Докажите, что $(a+b)(a+bc)\dots(a+bc\dots z) = 0$.

Решение. Раз первое произведение равно нулю, равен нулю один из сомножителей. Так как все числа целые, это означает, что в какой-то группе $a, b, c, \dots, x$ все числа равны ±1, причём чисел -1 в этой группе нечетное число. Но тогда в сумме $a + bc \dots x$ одно слагаемое равно 1, а второе -1. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+/-$	14	В конце доказательства рассмотрен только случай $a = 1$, $bcd... = -1$
$+/2$	10	Хорошее доказательство для частного случая и плохо обоснованный переход от частного к общему
$-/+$	6	Доказано только для частного случая
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-3. Посередине между пунктами и находится кофейня . Из пункта в пункт сначала выехал велосипедист. Когда он был на половине пути к кофейне, из выехал автомобилист. Известно, что когда автомобилист доехал до кофейни , велосипедист еще был в пути между и , причём расстояние от него до автомобилиста в этот момент было вдвое меньше, чем в тот момент, когда автомобилист только выехал из А. Какое событие произойдёт раньше: велосипедист доедет до или автомобилист — до ?

Ответ: одновременно.

Решение. Примем расстояние AC за 1. Когда автомобилист выехал из , велосипедист был в точке $1/2$, когда добрался до — в точке $3/4$. Значит, скорость автомобиля вчетверо больше скорости велосипеда. При этом, в этот момент расстояние между велосипедистом и было вчетверо меньше расстояния между автомобилистом и . Таким образом, ровно в момент, когда велосипедист окажется в , автомобилист доберется до . □

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+/-$	14	Есть значительное продвижение, но задача не доведена до ответа
$+/2$	10	Наличие правильного и неправильного решения
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-4. В треугольнике ABC, в котором все три стороны попарно различны, проведены биссектрисы углов A и B, делящие его на четырехугольник и три треугольника, два из которых равнобедренные. Найдите углы исходного треугольника.

Ответ: $4\pi/7, 2\pi/7, \pi/7$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке O, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Треугольник ABO равнобедренным быть не может, так как не может выполняться ни одно из следующих условий: $\alpha = \beta, \alpha + \beta/2 = 180°, \beta + \alpha/2 = 180°$. Найдём, при каком условии будет равнобедренным треугольник ALO. Равенство $\angle LAO = \angle LOA$ невозможно, поскольку $\angle LAO = \angle BAO$, а прямые BL и AB параллельными не являются. Равенство $\angle LAO = \angle LOA$ эквивалентно равенству $\beta+3\alpha/2 = 180°$. Аналогично равенство $\angle LAO = \angle ALO$ эквивалентно равенству $\beta + 3\alpha = 360°$. Тогда в силу условия задачи выполняется одна из следующих пар равенств:

$$\beta + 3\alpha/2 = 180°, \quad \alpha + 3\beta/2 = 180°;$$

$$\beta + 3\alpha = 360°, \quad \alpha + 3\beta = 360°;$$

$$\beta + 3\alpha/2 = 180°, \quad \alpha + 3\beta = 360°;$$

$$\beta + 3\alpha = 360°, \quad \alpha + 3\beta/2 = 180°.$$

Но первая пара равенств не может выполняться одновременно, так как $\alpha \neq \beta$. А вторая пара равенств не может выполняться, так как $\alpha+\beta \neq 180°$. Третья и четвёртая пара равенств как раз и приводит к указанному ответу. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Полностью верное решение, но допущена арифметическая ошибка или мелкий недочет
+/−	15	Доказана равнобедренность, но не все уравнения составлены правильно, из-за чего не все углы найдены правильно
+/2	10	Не доказана равнобедренность, но уравнения и ответ являются правильными
−/+	6	Не доказана равнобедренность, но получены правильные уравнения
−.	4	Доказано, что центральный треугольник не равнобедренный
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-5. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

Ответ: 3.

Решение. За три вопроса можно получить ответ следующим образом. Первые два вопроса про черепах 1 и 2, про 2 и 3. Если хотя бы один из ответов 0 или 2, про соответствующую пару знаем, кто они, про оставшуюся из трёх знаем из другого вопроса, остался 1 вопрос на 4-ю черепашку. Если оба ответа 1, то черепашки 1 и 3 одного пола. Тогда спросим про 1, 3, 4. Мы услышим ответ не меньше 2, если черепашки 1 и 3 были самцами, и ответ не больше 1 иначе. При этом пол черепашки 4 также однозначно восстанавливается, и остается одним вопросом выяснить пол черепашки 2.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Прежде всего заметим, что: а) за один вопрос, не зная общего числа самцов, мы не сможем разобраться даже с двумя черепашками; б) зная общее число самцов, мы сможем разобраться с двумя, но не сможем разобраться с тремя черепашками. Поэтому в ситуации четырёх черепашек и двух вопросов задавать первый вопрос про всех черепашек сразу или про одну черепашку бессмысленно. Поскольку при вопросе про группу из трёх или двух черепашек мы можем услышать ответ 1, такой вопрос также не приведёт к успеху. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Верный ответ, но не доказано, что меньше быть не может
+/2	10	Верный ответ с мелкими недочетами в решении и не доказано, что меньше быть не может
−.	4	Попытка проанализировать случаи с 2 и 3 вопросами, но сделан неверный вывод, что минимальное число — 4
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

Ответ: да.

Решение. Возьмём набор монет A суммарной стоимостью 51 тугрик. Докажем, что A состоит из одной монеты стоимостью 51 тугрик. Тогда останется прибавить ее к набору в 49 тугриков. Пусть k тугриков — стоимость самой дешевой монеты набора A. Если $k < 51$, то найдется набор монет В суммарной стоимостью $k-1$ тугрик. Ясно, что все монеты набора B дешевле k тугриков, поэтому все они не входят в набор A. Уберем из набора A одну монету стоимостью k тугриков и добавим туда все монеты набора B. Таким образом, мы набрали ровно 50 тугриков, противоречие. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Догадка, что существует монета в 51 тугрик, но нестрогое обоснование ответа
+/2	8	Догадка, что существует монета в 51 тугрик, но ответ не обоснован
−	0	Решение полностью неверно/только ответ