

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите задачи.

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

**1. (15 баллов) «Игры на поле»**

Три игрока играют в игру: каждый из игроков одновременно объявляет, какую часть площади поля он хочет занять -  $\forall i \in \{1,2,3\} x_i = [0; S]$ ,  $S \in \mathbb{R}^+$ , а его выигрыш (который он стремится увеличить) определяется как произведение свободной части поля на ту площадь, которую он пожелал занять:  $u_i(x) = (S - \sum_{j=1}^3 x_j) x_i$ . Допускается, что суммарная площадь, которую хотят занять игроки, будет больше доступной.

**(a) (5 баллов) «Сговор или публичный союз»** Первый и второй игрок решили объединить свои усилия, выбирая  $x_1$  и  $x_2$  так, что бы максимизировать свой суммарный выигрыш. Рационально ли им перед выбором стратегий поставить в известность третьего игрока о своей кооперации или нет? Предполагается, что в любом случае третий игрок не будет участвовать в кооперации.

**(b) (10 баллов) «Кто первый?»** Все игроки играют некооперативную игру. Игроки 2 и 3 выбирают стратегию одновременно. Какую из следующих стратегий выберет игрок 1:

- 1) выбрать одновременно с двумя остальными;
- 2) выбрать раньше других, так, что стратегия будет известна остальным;
- 3) выбрать позже других, так, что ему будут известны стратегии остальных;
- 4) выбрать позже других как и в 3), но взяв на себя публичное обязательство, объявив остальным, как будет зависеть выбираемая им стратегия от их стратегий.

**(15 points) “Games in the field”**

Three players play the game: each player simultaneously announces what part of the field he wants to occupy  $\forall i \in \{1,2,3\} x_i = [0; S]$ ,  $S \in \mathbb{R}^+$ , and his gain (which he seeks to increase) is defined as the product of the free part of the field and the area he wanted to occupy:

$u_i(x) = (S - \sum_{j=1}^3 x_j)x_i$ . It is allowed that the total area that players want to occupy may be greater than the available one.

- (a) **(5 points) “Collusion or public union”** The first and second players decided to cooperate to maximize their total winnings. Is it rational to let the third player know about their cooperation before choosing strategies? It is assumed that in any case the third player will not participate in the cooperation.
- (b) **(10 points) “Who is the first?”** All players play a non-cooperative game. Players 2 and 3 choose a strategy at the same time. Which of the following strategies will player 1 choose?
- 1) choose simultaneously with the other two;
  - 2) choose before others, so that the strategy will be known to the rest;
  - 3) choose later than others, so that he will know the strategies of the others;
  - 4) choose later than others as in 3), but by making a public commitment, declaring to others how the strategy chosen by them will depend on their strategies.

**2. (15 баллов) «Сыграешь с НИМ?»**

Анни и Бенни играют в игру Ним: перед ними кучка из  $N$  камней и каждый по очереди может взять по  $1, 2, \dots, k < N$  камней. Начинает Анни, так что порядок ходов выглядит как АБАБАБ... Выигрывает тот, кто взял последний камень. Перед началом игры Бенни может немного поменять порядок ходов, а именно переставить один свой ход на соседнее место. (Например, поставить свой второй ход сразу после первого и получить порядок АББААБ.) Кто может гарантировать себе победу и при каких условиях? Найдите выигрышные стратегии для Анни и Бенни.

*Подсказка:* в обычной игре без перестановок ходов оптимальный ответ Анни брать  $A_{t+1} = k + 1 - B_t$ .

**(15 points) “Let’s play with NIM!”**

Annie and Benny play the game of Nim: there is a pile of  $N$  stones in front of them and everyone can take  $1, 2, \dots, k < N$  stones in turn. Annie starts, so the order of moves looks like ABABAB ... The one who took the last stone wins. Before the start of the game, Benny can change the order of moves a little, namely, rearrange one of his moves to the next place. (For example, put his second move right after the first and get the ABBAAB order.) Who can guarantee a victory for themselves and under what conditions? Find winning strategies for Annie and Benny.

*Hint:* In a standard game without permutations of moves, Annie’s optimal answer is to take  $A_{t+1} = k + 1 - B_t$ .

**3. (10 баллов) «Больше, чем кажется»**

Существует ли конечная статическая игра двух лиц, где все чистые стратегии каждого игрока различны, такая, что в чистых стратегиях нет равновесия по Нэшу, а в ее смешанном расширении равновесий бесконечное количество? Если «да», приведите пример, если «нет» - докажите.

**(10 points) “More than it seems”**

Does there exist a finite static two-person game where all the pure strategies of each player are different, such that there is no Nash equilibrium in pure strategies, and the infinite number of equilibria in its mixed expansion? If “yes”, give an example, if “no” - prove it.

**4. (30 баллов) «Идеальный налог»**

В Кукумбрии намечаются выборы президента. Исход выборов определит отношение кандидатов к вопросу об уровне налогов на доходы. Все возможные позиции по этому вопросу можно представить в виде отрезка  $[0,1]$ , где точка  $x \in [0,1]$  соответствует позиции «на налоги должна уходить доля  $x$  доходов». Каждый избиратель характеризуется своей идеальной точкой – наиболее желаемым уровнем налога. Предпочтения каждого избирателя таковы, что чем ближе выбранная величина налогов к идеальной точке этого избирателя, тем ему лучше. Идеальные точки избирателей распределены равномерно вдоль отрезка  $[0,1]$ .

$N$  кандидатов в президенты по очереди выбирают свою политическую платформу, с которой они будут участвовать в избирательной кампании, – точку на отрезке  $[0,1]$ . Кроме того, кандидатам доступна возможность отказаться от участия в выборах. Победа на выборах принесет кандидату выигрыш в размере 1. Участие в выборах требует уплаты регистрационного взноса  $\delta$ .

Каждому кандидату доступна информация о выбранной платформе предыдущими кандидатами. После того, как все кандидаты выбрали свою политическую платформу, начинается голосование. Избиратели голосуют нестратегически, ориентируясь исключительно на свои предпочтения и выбирая кандидата с наиболее близкой платформой. Кандидат, который получит наибольшую долю голосов избирателей, становится президентом. Если  $k$  кандидатов набрали одинаковую максимальную долю голосов, то каждый из них становится президентом с вероятностью  $1/k$ . Регистрационный взнос мал по сравнению с выигрышем выборов, даже разделенным между всеми кандидатами:  $0 < \delta < 1/N$ .

**(a) (10 баллов)** Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх, для случая  $N=2$ . (опишите действия на равновесной траектории)

**(b) (20 баллов)** Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх, для случая  $N=3$ . (опишите действия на равновесной траектории)

**(30 points) “Ideal taxes”**

In Kukumbriya the presidential elections are coming. The outcome of the elections will determine the attitude of the candidates to the question of the level of taxes on income. All possible positions on this issue can be represented as a segment  $[0,1]$ , where the point  $x \in [0,1]$  corresponds to the position “the share  $x$  of income should go on taxes”. Each voter is characterized by its ideal point, i.e. the most desirable tax level. The preferences of each voter are such that the closer the chosen amount of taxes to the ideal point of this voter, the better. Ideal points of the voters are distributed evenly along the interval  $[0,1]$ .

$N$  candidates for the presidency sequentially choose their political platform with which they will participate in the election campaign, the point on the  $[0,1]$  segment. In addition, candidates have the opportunity to refuse to participate in elections. The election victory will bring the candidate a gain of 1. Participation in elections requires payment of the registration fee  $\delta$ .

Each candidate has the information about the selected platform by previous candidates. After all candidates have chosen their political platform, voting begins. Voters vote non-strategically, focusing solely on their preferences and choosing a candidate with the closest platform. The candidate who receives the largest share of the vote becomes president. If  $k$  candidates get the same maximum share of votes, then each of them becomes president with a probability of  $1/k$ . The registration fee is small in comparison with the election winnings, even divided among all candidates:  $0 < \delta < 1/N$ .

**(a) (10 points)** Find a subgame perfect Nash equilibrium for  $N=2$ . (describe the strategies under the equilibrium path)

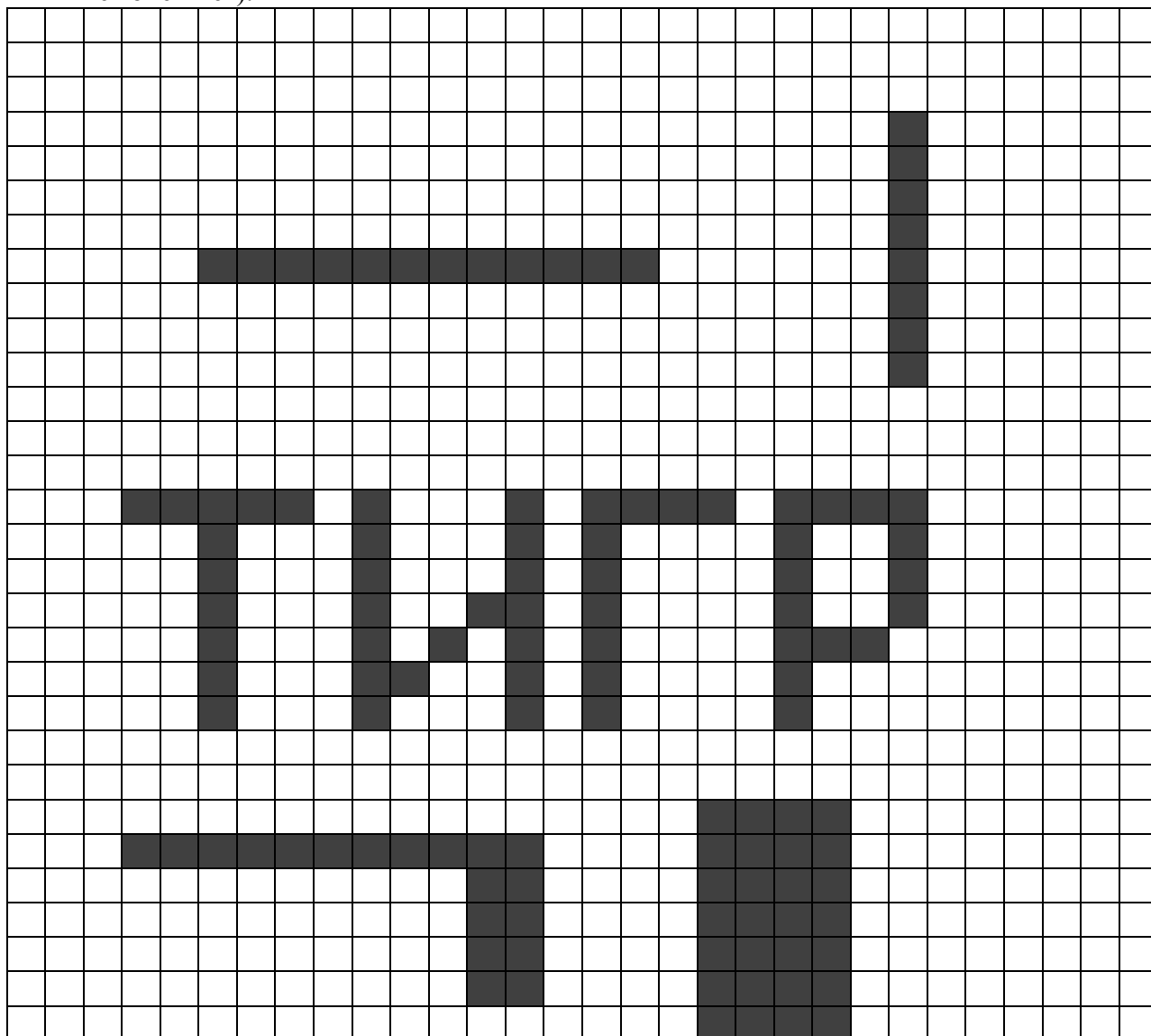
**(b) (15 points)** Find a subgame perfect Nash equilibrium for  $N=3$ . (describe the strategies under the equilibrium path)

**5. (10 баллов) «Заблудившийся парашютист»**

**(За оригинальное решение для произвольной карты топей бонус +10 баллов)**

Петя и Митя играют в настольную игру с кубиком, где им надо спасти парашютиста, который высаживается на топкое болото и прыгает по кочкам, стремясь достичь твердой земли.

Парашютист – это фишка на черно-белой клетчатой доске 100 на 100. Белые клетки – кочки (на них парашютист может стоять), а черные клетки – топи (игрок, который переместит парашютиста в черную клетку, проигрывает). Топей не слишком много (меньше 1000), их расположение представлено на рисунке (это левая нижняя часть, правее и выше топей нет).



Игра начинается с того, что парашютист высаживается равновероятно на одну из кочек (белых клеток) с помощью кубика. Он хочет попасть на твердую землю (левый нижний угол доски).

Петя и Митя по очереди перемещают парашютиста. Парашютист умеет делать следующее: прыгнуть на 1 или 2 клетки влево, или 1 или 2 клетки вниз, или сделать 1 шаг по диагонали влево-вниз.

Тот из мальчиков, кто поставит парашютиста на твердую землю, выигрывает.

Перед началом игры (высадкой парашютиста) ребята решают, что Петя будет ходить первым, а Митя вторым.

У кого из ребят преимущество?

**(10 points) “Lost parachutist”**

**(For the ingenious solution for the arbitrary map of swamps, we will give the bonus +10 points)**

Petya and Mitya play a board game with a dice, where they need to save a parachutist who lands on a swampy marsh and jumps over bumps, trying to reach solid ground.

A parachutist is a piece on a black and white checkered board 100 by 100. White cells are bumps (the parachutist can stand on them), and black cells are swamps (the player who moves the parachutist to the black cell loses). There are not too many swamps (less than 1000), their location is shown in the figure above (this is the lower left part, there are no any other swamps to the right and above).

The game begins as the parachutist landed on one of the bumps (white cells) with equal probabilities (with the dice). He wants to get on solid ground (bottom left corner of the board).

Petya and Mitya move the parachutist in turns. The parachutist can do the following: jump 1 or 2 squares to the left, or 1 or 2 squares down, or take 1 step diagonally down-left.

The boy who puts the parachutist on the solid ground wins.

Before the start of the game (disembarking the parachutist), the guys decide that Petya will move first, and Mitya second.

Which of the guys has an advantage?

**6. (20 баллов) «Не пей эту воду»**

Иванушка-дурачок идёт на бой к Кашею-Бессмертному. Бой заключается в том, что каждый предлагает другому стакан воды – либо чистой (0), либо ядовитой (1-10), и противник обязан ее выпить. Ядовитая вода с более старшим номером нейтрализует ядовитую воду с более младшим номером. Чистая вода ни на что не влияет. Источник наиболее ядовитой, 10-й воды находится в пещере у Кощея. Как Иван, так и Кошей также могут выпить стакан любой доступной им воды как до, так и после встречи. (Можно даже выпить стакан до встречи, стакан противника и потом - стакан после.) Какие шансы у Ивана и у Кошей, соответственно (быть живыми после дуэли)?

**(20 points) “Do not drink this water”**

Ivanushka the Fool goes to the battle with Kashchei-the Immortal. The fight is organized as follows: each offers the opponent a glass of water, either pure (0) or poisonous (1-10), and the opponent have to drink it. Poisonous water with a higher number neutralizes poisonous water from a lower number. Clean water does not affect anything. The source of the most poisonous, 10<sup>th</sup>, water is located in Koschei’s cave. Both Ivan and Koschey can also drink a glass of any water available to them both before and after the meeting. (They can even drink a glass before the meeting, a glass of the enemy and then a glass after.) What are the chances for Ivan and Koshchey, respectively (to be alive after the duel)?