Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников – 2019 г.

Направление: «Теория игр»

Профиль: «Теория игр» **КОД – 390**

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Время выполнения задания – <u>180 мин</u>., язык – <u>русский или английский</u>.

Решите все задачи.
Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

1. (15 баллов) «Игры на поле»

Три игрока играют в игру: каждый из игроков одновременно объявляет, какую часть площади поля он хочет занять - $\forall i \in \{1,2,3\}\ x_i = [0; S]$, $S \in \mathbb{R}^+$, а его выигрыш (который он стремится увеличить) определяется как произведение свободной части поля на ту площадь, которую он пожелал занять: $u_i(x) = (S - \sum_{j=1}^{3} x_j)x_i$. Допускается, что суммарная площадь, которую хотят занять игроки, будет больше доступной.

(a) **(5 баллов) «Сговор или публичный союз»** Первый и второй игрок решили объединить свои усилия, выбирая x_1 и x_2 так, что бы максимизировать свой суммарный выигрыш. Рационально ли им перед выбором стратегий поставить в известность третьего игрока о своей кооперации или нет? Предполагается, что в любом случае третий игрок не будет участвовать в кооперации.

(b) **(10 баллов) «Кто первый?»** Все игроки играют некооперативную игру. Игроки 2 и 3 выбирают стратегию одновременно. Какую из следующих стратегий выберет игрок 1:

1) выбрать одновременно с двумя остальными;
2) выбрать раньше других, так, что стратегия будет известна остальным;
3) выбрать позже других, так, что ему будут известны стратегии остальных;
4) выбрать позже других как и в 3), но взяв на себя публичное обязательство, объявив остальным, как будет зависеть выбираемая им стратегия от их стратегий.

(15 points) "Games in the field"

Three players play the game: each player simultaneously announces what part of the field he wants to occupy $\forall i \in \{1,2,3\}$ $x_i = [0; S]$, $S \in \mathbb{R}^+$, and his gain (which he seeks to increase) is defined as the product of the free part of the field and the area he wanted to occupy: $u_i(x) = (S - \sum_{j=1}^{3} x_j)x_i$. It is allowed that the total area that players want to occupy may be greater than the available one.

(a) **(5 points) "Collusion or public union"** The first and second players decided to cooperate to maximize their total winnings. Is it rational to let the third player know about their cooperation before choosing strategies? It is assumed that in any case the third player will not participate in the cooperation.

(b) **(10 points) "Who is the first?"** All players play a non-cooperative game. Players 2 and 3 choose a strategy at the same time. Which of the following strategies will player 1 choose?
1) choose simultaneously with the other two;
2) choose before others, so that the strategy will be known to the rest;
3) choose later than others, so that he will know the strategies of the others;
4) choose later than others as in 3), but by making a public commitment, declaring to others how the strategy chosen by them will depend on their strategies.

РЕШЕНИЕ

Под участником будем понимать участника олимпиады, решающего данную задачу.

При оценке решения участником важно учитывать, на какую модель принятия решений при исследовании игры. Предоставляемое ниже решении основано на том, что под одновременным и независимым принятием решения подразумевается модель игры в нормальной форме а рациональные игроки, исходя из концепции наилучших ответов, реализуют равновесие Нэша в ситуации отсутствия кооперации. Оба подпункта задачи подразумевают, что участник должен найти равновесные по Нэшу стратегии игроков и их выигрыши в ситуации равновесия Нэша.

Для этой модели получаем, что для каждого игрока его функция наилучшего ответа на игровую обстановку определяется как

$BR_i(S, x_{-i}) = (S - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j)/2$.

Соответственно неподвижная точка отображения $BR(S, x)$ – это ситуация, в которой стратегии всех игроков равны $x_i^* = S(n+1)^{-1}$, т.е. для случая трех игроков $x_i^* = S/4$. Их выигрыши в равновесии - $u_i(x^*) = S^2(n+1)^{-2}$, для случая трех игроков - $u_i(x^*) = S^2/16$.

а) В условии задачи сказано, что объединяясь, игроки 1 и 2 планируют максимизировать свою суммарную полезность, т.е. $u_{12} = (S - (x_1+x_2) - x_3)(x_1+x_2)$, т.е. выступают как один игрок с функцией полезности $u_{12} = (S - x_{12} - x_3)x_{12}$, $x_{12} = x_1+x_2$. Соответственно, функция полезности третьего игрока принимает вид $u_3 = (S - x_{12} - x_3)x_3$. Т.е. игру трех лиц можно рассматривать как игру двух лиц, при условии полной информированности игроков – т.е. при условии, что третий игрок осведомлен о кооперации. В этом случае в равновесии Нэша $x_{12}^{**} = x_3^{**} = S/3$ и $u_{12}(x^{**}) = u_3(x^{**}) = S^2/9$.

В случае, если третий игрок не осведомлен о кооперации и считает, что разыгрывается некооперативная игра в нормальной форме, а первые два знают об этом, то третий игрок, как прежде выбирает стратегию $x_3^* = S/4$, а первый и второй выбирают $BR_{12}(S, x_3) = 3S/8$. В этом случае $u_{12}(x) = 9S^2/64$.

Откуда можно сделать вывод, первому и второму игроку не рационально ставить в известность третьего о своей кооперации, т.к. $9S^2/64 > S^2/9$. Более того, в случае осведомленности третьего игрока о кооперации с целью максимизации суммарной полезности, первому и второму игроку даже не рационально кооперироваться, т.к. $2S^2/16 > S^2/9$.

Необходимо заметить, что именно из-за последнего вывода участник в решении может предположить, что если кооперация известна третьему игроку, то первые два будут как прежде разыгрывать равновесные по Нэшу стратегии для игры трех лиц и это также учитывает и третий игрок, поэтому в итоге все три игрока разыгрывают некооперативную игру в нормальной форме. Это не совсем канонический подход, и он допустим только при условии, что участник указал о соответствующей осведомленности игроков. В этом случае, «сговор» первого и второго игроков остается более предпочтительным для них, т.к. $9S^2/64 > 2S^2/16$.

b)

1. Как и прежде, разыгрывается игра в нормальной форме, соответственно $u_1 = S^2/16$.
2. Предполагая, что игроки, принимающее решение одновременно, разыгрывают между собой игру в нормальной форме, получаем, что для определения своей стратегии первый игрок максимизирует функцию $\tilde{u}_1(x_1) = \left(S - \frac{2(S-x_1)}{3} - x_1\right)x_1 = \frac{1}{3}(S - x_1)x_1$. Откуда получаем $x_1 = S/2$, $u_1 = S^2/12$.
3. Стратегия, выбираемая первым игроком с целью максимизации своего выигрыша, будет определяться как $x_1 = (S - (x_2+x_3))/2$. С учетом этого, предполагая, что игроки, принимающее решение одновременно, разыгрывают между собой игру в нормальной форме, для которой выигрыш второго и третьего игрока будет определяться как $u_i = 0.5(S - x_2 - x_3)x_i$ получаем, что $x_2 = x_3 = S/3$ а $x_1 = S/6$. Откуда следует, что $u_1 = S^2/36$.
4. Рассмотрим стратегию первого игрока как «контракт» по отношении между игроком 1 и игрокам 2 и 3, в рамках которого первый игрок мотивирует оставшихся двух выбрать такие стратегии, которые позволят первому получить как можно больший выигрыш. Для этого первый игрок может сформулировать «угрозу» или «штрафную санкцию» – такую свою стратегию, что выигрыши каждого из оставшихся двух игроков будет заведомо ниже, чем в случае следования контракту. В данной модели первый игрок может «наказать» второго и третьего игроков выбирая стратегию $x_1 = S - (x_2+x_3)$, при условии, что $x_2+x_3 \le S$ и $x_1 = 0$ в противном случае. В случае такого наказания выигрыши всех игроков будут не больше 0 (включая и первого). Используя такую стратегию угрозы, можно определить, что для второго и третьего игрока будут рациональными любые такие игровые ситуации, в которых их выигрыши будут больше 0. В частности, если в рамках контракта первый игрок «разрешит» второму и третьему в качестве своей стратегии выбирать некоторую сколь угодно малую положительную величину ε, а сам при этом обязуется выбирать стратегию $x_1 = S/2 - \varepsilon$, то в этом случае $u_2 = u_3 = (S/2 - \varepsilon)\varepsilon > 0$. Т.е., если первый игрок, прежде чем второй и третий выберут свои стратегии, объявит, что его стратегия обязательно будет зависеть от стратегий второго и третьего как
$$x_1(x_2, x_3) = \begin{cases} 0.5S - \varepsilon, & x_2 = x_3 = \varepsilon, \\ \max(S - x_2 - x_3, 0), & x_2 \ne \varepsilon \vee x_3 \ne \varepsilon \end{cases}$$

то второму и третьему игроку будет рационально выбирать свои стратегии равными ε. В этом случае выигрыш первого игрока составит $u_1 = (S/2 - \varepsilon)^2$.
Из этих выкладок следует, что случай 4 является наиболее предпочтительным для игрока 1 (при достаточно малых значениях ε), за ним следует случай 2, затем 1 и наименее предпочтительным является случай 3.

Критерии
a) - 3 балла за арифметические ошибки, при условии верной логики и ответа.
1 балл, если есть верный ответ и словесное рассуждение.
5 баллов при условии верного ответа и верного решения задачи в числах.
b) 1-2 балла за логичное рассуждение относительно верной стратегии.
8 баллов за верно посчитанные выигрыши для ситуаций 1,2,3 и их верное сравнение.
4-6 баллов, если есть 2 верно посчитанных выигрыша, либо есть арифметические ошибки.
10 баллов за верное решение ситуаций 1,2,3 и разбор ситуации 4 с верным ответом.

2. (15 баллов) «Сыграешь с НИМ?»
Анни и Бенни играют в игру Ним: перед ними кучка из N камней и каждый по очереди может взять по 1,2,…,k < N камней. Начинает Анни, так что порядок ходов выглядит как АБАБАБ… Выигрывает тот, кто взял последний камень. Перед началом игры Бенни может немного поменять порядок ходов, а именно переставить один свой ход на соседнее место. (Например, поставить свой второй ход сразу после первого и получить порядок АББААБ.) Кто может гарантировать себе победу и при каких условиях? Найдите выигрышные стратегии для Анни и Бенни.
Подсказка: в обычной игре без перестановок ходов оптимальный ответ Анни брать A_{t+1}=k+1-B_t.

(15 points) "Let's play with NIM!"
Annie and Benny play the game of Nim: there is a pile of N stones in front of them and everyone can take 1,2, ..., $k < N$ stones in turn. Annie starts, so the order of moves looks like ABABAB ... The one who took the last stone wins. Before the start of the game, Benny can change the order of moves a little, namely, rearrange one of his moves to the next place. (For example, put his second move right after the first and get the ABBAAB order.) Who can guarantee a victory for themselves and under what conditions? Find winning strategies for Annie and Benny.
Hint: In a standard game without permutations of moves, Annie's optimal answer is to take A_{t+1}=k+1-B_t.

РЕШЕНИЕ

Бенни всегда может гарантировать себе победу.
Достаточно рассмотреть перестановки первого и второго ходов.

1. N делится на k+1 без остатка: Бенни не переставляет ход, порядок исходный АБАБ…, и на каждый ход Анни A_t отвечает классическим B_{t+1}=k+1-A_t.
2. $k < N < 2k$: Бенни ставит свой второй ход после первого, порядок АББА…, и забирает все камни двумя ходами.
3. $N > 2k$ и НЕ делится на k+1 без остатка: Бенни ставит свой второй ход после первого, порядок АББА…, и либо забирает все камни двумя ходами, либо делает так, чтобы после его второго хода количество оставшихся камней было делимо на (k+1) и на каждый ход Анни A_t , t>2, снова отвечает B_{t+1}=k+1-A_t.

Критерии

1-2 балла за логически верный фрагмент рассуждения.

6-12 баллов за верный ответ, но недостаточно аргументированный. Обычно описывались не все возможные постановки игры (задача в общем виде для n и k), брались частные случаи, иногда очень частные. Не прописана полностью выигрышная стратегия, либо прописана для частного случая игры. Балл ставился в зависимости от общности ответа.

15 баллов за выигрышную стратегию в общем виде.

3. (10 баллов) «Больше, чем кажется»

Существует ли конечная статическая игра двух лиц, где все чистые стратегии каждого игрока различны, такая, что в чистых стратегиях нет равновесия по Нэшу, а в ее смешанном расширении равновесий бесконечное количество? Если «да», приведите пример, если «нет» - докажите.

(10 points) "More than it seems"

Does there exist a finite static two-person game where all the pure strategies of each player are different, such that there is no Nash equilibrium in pure strategies, and the infinite number of equilibria in its mixed expansion? If "yes", give an example, if "no" - prove it.

РЕШЕНИЕ

Существует. Такую игру явно. Рассмотрим антагонистическую игру 2X2, в которой нет равновесия в чистых стратегиях. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Если обозначить стратегии первого игрока s_1 и s_2, то добавим теперь ему третью стратегию s_3, так что, $s_3 = a_1 s_1 + a_2 s_2,$ где a_1, a_2 - некоторые положительные веса, отличные от нуля: $a_1 + a_2 = 1$. В качестве примера, пусть $a_1 = a_2 = 0{,}5$. Теперь наша игра приняла вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$, и в ней по-прежнему нет равновесия в чистых стратегиях (максимин и минимакс не равны).

Найдем равновесие в ее смешанном расширении. Поскольку у второго игрока всего две стратегии, $t_1, t_2,$ то решение можно искать, например, «методом стакана», откуда очевидно следует, что второй игрок будет смешивать свои стратегии с вероятностями по 0.5, то есть его равновесная стратегия $\tau = 0.5t_1 + 0.5t_2,$ при этом ожидаемый выигрыш первого игрока равен 0.5 при любой из его стратегий. Чтобы у второго игрока не было стимула отклоняться, первый игрок может играть например такую стратегию: $\sigma = 0.5s_1 + 0.5s_2,$ и равновесие будет (σ, τ). Очевидно, что профиль (s_3, τ) также равновесный. И наконец, для любого $\beta \in (0;1)$ профиль $(\beta\sigma + (1-\beta)s_3, \tau)$ тоже будет равновесным, поскольку при любом $\beta \in (0;1)$ ожидаемый выигрыш второго игрока равен (-0.5), так что у него нет стимула отклонятся от стратегии τ. Наоборот, при данной стратегии τ второго игрока всегда доставляет выигрыш первому игроку равный 0.5 при любой его стратегии, значит и стратегия первого игрока $\beta\sigma + (1-\beta)s_3 = 0.5\beta s_1 + 0.5\beta s_2 + (1-\beta)s_3$ будет равновесной.

Таким образом, построено бесконечное количество равновесных профилей $(0.5\beta s_1 + 0.5\beta s_2 + (1-\beta)s_3, 0.5t_1 + 0.5t_2)$ в смешанном расширении игры $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Критерии

Неверно понятое условие задачи: 0 баллов за всю задачу.

При частичном решении:

Приведена статическая конечная игра 2 лиц:	1 балл
Доказано, что в приведенной игре нет равновесия:	1 балл
Найдено одно равновесие в смешанной игре:	2 балла
Показано, что смешанных равновесий может быть больше одного:	2 балла
Доказано, что равновесий бесконечное число:	4 балла

4. (30 баллов) «Идеальный налог»

В Кукумбрии намечаются выборы президента. Исход выборов определит отношение кандидатов к вопросу об уровне налогов на доходы. Все возможные позиции по этому вопросу можно представить в виде отрезка [0,1], где точка $x \in [0,1]$ соответствует позиции «на налоги должна уходить доля x доходов». Каждый избиратель характеризуется своей идеальной точкой – наиболее желаемым уровнем налога. Предпочтения каждого избирателя таковы, что чем ближе выбранная величина налогов к идеальной точке этого избирателя, тем ему лучше. Идеальные точки избирателей распределены равномерно вдоль отрезка [0,1].

N кандидатов в президенты по очереди выбирают свою политическую платформу, с которой они будут участвовать в избирательной кампании, – точку на отрезке [0,1]. Кроме того, кандидатам доступна возможность отказаться от участия в выборах. Победа на выборах принесет кандидату выигрыш в размере 1. Участие в выборах требует уплаты регистрационного взноса δ.

Каждому кандидату доступна информация о выбранной платформе предыдущими кандидатами. После того, как все кандидаты выбрали свою политическую платформу, начинается голосование. Избиратели голосуют нестратегически, ориентируясь исключительно на свои предпочтения и выбирая кандидата с наиболее близкой платформой. Кандидат, который получит наибольшую долю голосов избирателей, становится президентом. Если k кандидатов набрали одинаковую максимальную долю голосов, то каждый из них становится президентом с вероятностью $1/k$. Регистрационный взнос мал по сравнению с выигрышем выборов, даже разделенным между всеми кандидатами: $0 < \delta < 1/N$.

(a) **(10 баллов)** Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх, для случая N=2. (опишите действия на равновесной траектории)

(b) **(20 баллов)** Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх, для случая N =3. (опишите действия на равновесной траектории)

(30 points) "Ideal taxes"

In Kukumbriya the presidential elections are coming. The outcome of the elections will determine the attitude of the candidates to the question of the level of taxes on income. All possible positions on this issue can be represented as a segment [0,1], where the point $x \in [0,1]$ corresponds to the position "the share x of income should go on taxes". Each voter is characterized by its ideal point, i.e. the most desirable tax level. The preferences of each voter are such that the closer the chosen amount of taxes to the ideal point of this voter, the better. Ideal points of the voters are distributed evenly along the interval [0,1].

N candidates for the presidency sequentially choose their political platform with which they will participate in the election campaign, the point on the [0,1] segment. In addition, candidates have the opportunity to refuse to participate in elections. The election victory will bring the candidate a gain of 1. Participation in elections requires payment of the registration fee δ.

Each candidate has the information about the selected platform by previous candidates. After all candidates have chosen their political platform, voting begins. Voters vote non-strategically, focusing solely on their preferences and choosing a candidate with the closest platform. The candidate who receives the largest share of the vote becomes president. If k candidates get the same maximum share of votes, then each of them becomes president with a probability of $1/k$. The registration fee is small in comparison with the election winnings, even divided among all candidates: $0 < \delta < 1 / N$.

(a) (10 points) Find a subgame perfect Nash equilibrium for N=2. (describe the strategies under the equilibrium path)

(b) (15 points) Find a subgame perfect Nash equilibrium for N=3. (describe the strategies under the equilibrium path)

РЕШЕНИЕ

Обозначим через m = ½ медиану равномерного распределения.

Утверждение. В равновесием, совершенном к подыграм, каждый игрок, который решил участвовать в выборах, получает одинаковую долю голосов.

Доказательство. Если это не так, то по меньшей мере один из вошедших игроков проиграет выборы. Но тогда он увеличит свой выигрыш, если откажется от участия.

а) $N = 2$

При N=2 в игре существует единственное равновесие совершенное к подыграм: оба кандидата входят в точке m. Действительно, рассмотрим сначала ситуация входа лидера в позицию, отличную от m. Тогда в своей подыгре игрок 2 может войти и выиграть выборы полностью, так что игрок 1 получит отрицательный выигрыш (и ему лучше отказаться от участия вообще).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда игрок 1 входит в точку m. Наилучший ответ игрока 2 тоже войти в m, так что будет ничья. Улучшить эту ситуацию игрок-лидер уже не может.

b) $N = 3$

При $N = 3$ в игре существует единственное равновесие, совершенное к подыграм. В нем игроки 1 и 3 входят в m, а игрок 2 отказывается от участия в выборах.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда игрок 1 входит в игру в позицию x_1 отличную от m. Не умаляя общности, полагаем что $x_1 < m$. Обозначим

$$x_2 = \begin{cases} 3/4 - x_1/2 & \text{if } 1/6 \le x_1 < m \\ 2/3 & \text{if } 0 \le x_1 < 1/6. \end{cases}$$

(Заметим, что $3/4 - x/2 = (1/2)[1/2 + 1 - x]$, это среднее 1/2 и $1 - x$.) При условии $x_1 > 0$, если игрок 2 входит в позицию x_2, тогда (i) игрок 3 проигрывает в какую бы позицию он ни вошел, (ii) если же игрок 3 решает не входить, то игрок 2 выигрывает единолично, а игрок 1 проигрывает. Таким образом, если существуют равновесия совершенные к подыграм с условием $x_1 > 0$, то во всех них игрок 2 входит и выигрывает выборы. Если же $x_1 = 0$, то в единственном равновесии совершенном к подыграм игроки 2 и 3 входят в точку 2/3, что дает всеобщую ничью.

Таким образом, в предполагаемом равновесии совершенном к подыграм при входе игрока 1 в точку отличную от m, он либо проигрывает, либо (если входит в 0) делит победу с игроками 2 и 3.

Теперь рассмотрим его вход в m. Если игрок 2 тоже входит в m, то игрок 3 может выиграть единолично, если войдет достаточно близко к m. Если же игрок 2 войдет в позицию, отличную от m, то игрок 3 будет делить первое место с игроком 1, если войдет в m. Тогда игроку 2 лучше не участвовать в выборах.

Если игрок 2 не входит в игру, то наилучший ответ игрока 3 – войти в точку m.

Так мы показали, что в каждом равновесии совершенном к подыграм игрок 1 входит в m и получает победу с равными шансами с игроком 3.

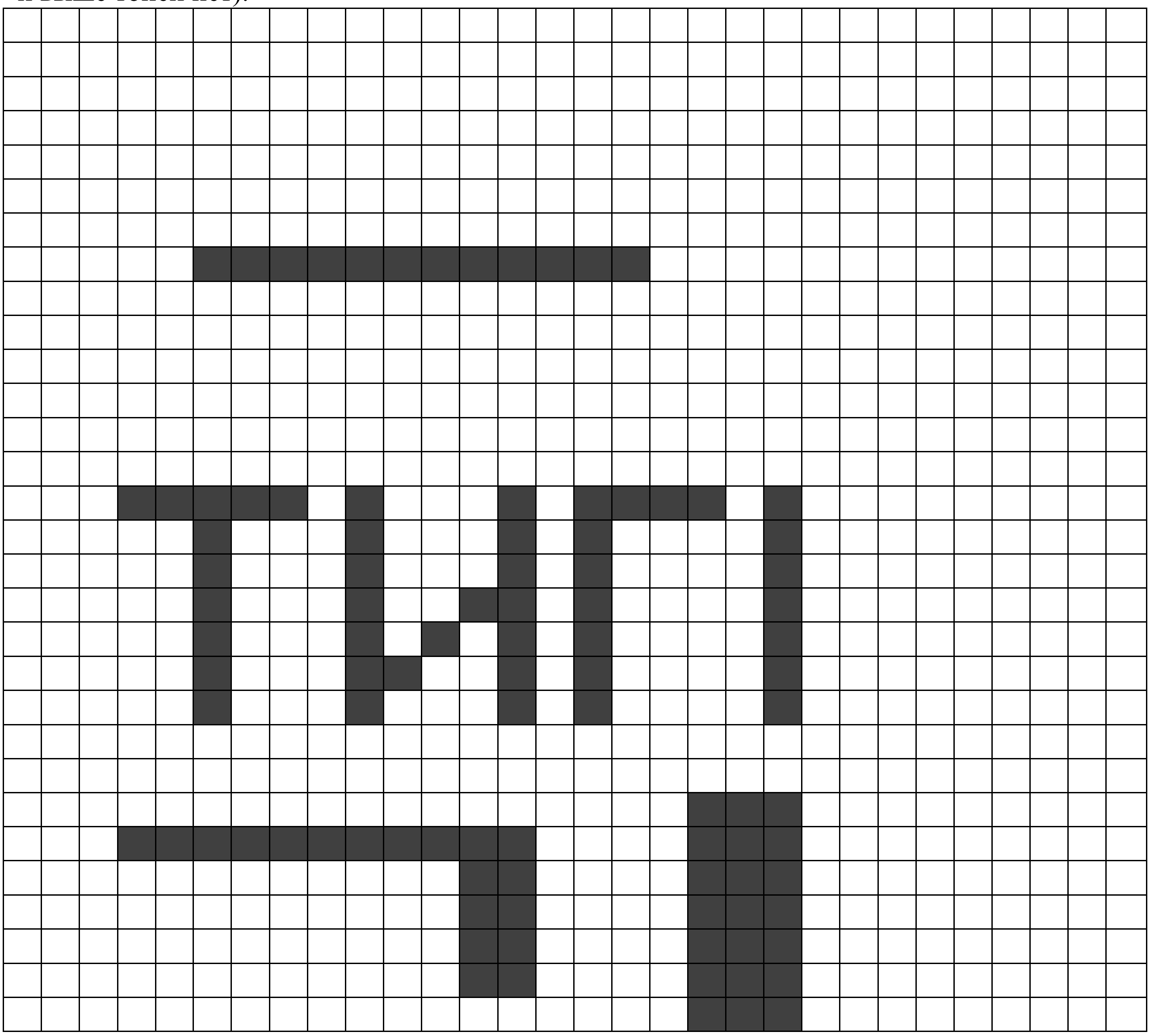
Критерии

a) Снималось 1-2 балла за ответ типа "x1=x2=1/2", если человек четко не проговаривал, что стратегия второго - это наилучший ответ.
b) Плюс/минус правильно решило только два человека. Многим за попытку каких-то рассуждений ставилось 4 балла.

5. (10 баллов) «Заблудившийся парашютист»
(За оригинальное решение для произвольной карты топей полагается бонус +10 баллов)

Петя и Митя играют в настольную игру с кубиком, где им надо спасти парашютиста, который высаживается на топкое болото и прыгает по кочкам, стремясь достичь твердой земли.

Парашютист – это фишка на черно-белой клетчатой доске 100 на 100. Белые клетки – кочки (на них парашютист может стоять), а черные клетки – топи (игрок, который переместит парашютиста в черную клетку, проигрывает). Топей не слишком много (меньше 1000), их расположение представлено на рисунке (это левая нижняя часть, правее и выше топей нет).



Игра начинается с того, что парашютист высаживается равновероятно на одну из кочек (белых клеток) с помощью кубика. Он хочет попасть на твердую землю (левый нижний угол доски).

Петя и Митя по очереди перемещают парашютиста. Парашютист умеет делать следующее: прыгнуть на 1 или 2 клетки влево, или 1 или 2 клетки вниз, или сделать 1 шаг по диагонали влево-вниз.

Тот из мальчиков, кто поставит парашютиста на твердую землю, выигрывает.

Перед началом игры (высадкой парашютиста) ребята решают, что Петя будет ходить первым, а Митя вторым.

У кого из ребят преимущество?

(10 points) “Lost parachutist”

(For the ingenious solution for the arbitrary map of swamps, we will give the bonus +10 points)

Petya and Mitya play a board game with a dice, where they need to save a parachutist who lands on a swampy marsh and jumps over bumps, trying to reach solid ground.

A parachutist is a piece on a black and white checkered board 100 by 100. White cells are bumps (the parachutist can stand on them), and black cells are swamps (the player who moves the parachutist to the black cell loses). There are not too many swamps (less than 1000), their location is shown in the figure above (this is the lower left part, there are no any other swamps to the right and above).

The game begins as the parachutist landed on one of the bumps (white cells) with equal probabilities (with the dice). He wants to get on solid ground (bottom left corner of the board).

Petya and Mitya move the parachutist in turns. The parachutist can do the following: jump 1 or 2 squares to the left, or 1 or 2 squares down, or take 1 step diagonally down-left.

The boy who puts the parachutist on the solid ground wins.

Before the start of the game (disembarking the parachutist), the guys decide that Petya will move first, and Mitya second.

Which of the guys has an advantage?

РЕШЕНИЕ

Преимущество у Пети.

В самом деле, рассмотрим множество N клеток, при начале игры с которых, делающий первый ход проигрывает при оптимальной игре оппонента (используем теорему Цермелло о том, что в позиционных играх у одного из игроков есть чистая выигрышная стратегия).

Покажем, что множество N не может быть слишком плотным. Рассмотрим клетку (x,y), принадлежащую N. Тогда клетки (x+1,y), (x+2,y), (x+1,y+1), (x,y+1), (x, y+2) не могут принадлежать N. Возможны следующие варианты:

--- если это белые клетки, то при начале игры с них, первый игрок может переместить парашютиста в (x,y) => второй игрок проигрывает

--- либо эти клетки --- топи, либо лежат вне игрового поля.

Грубо оценим количество клеток в множестве N. Вместе с каждой клеткой (x,y) из N, рассмотрим “блок” B(x,y)= {(x,y),(x+1,y), (x,y+1), (x+1, y+1)}. Заметим, что (x+1,y+1) не может принадлежать ни одному другому блоку B(x’,y’) с (x’,y’) из N. Клетки (x+1,y), (x,y+1) принадлежат еще не более одному блоку.

Таким образом, на каждую клетку из N с координатами 1...99, приходится как минимум 1+ ½ + ½=2 клетки не из N. Таким образом (|N|-199)+ 2(|N|-199) должно быть меньше 99*99 (тут мы использовали грубую прикидку, что внутри квадрата 99 на 99 находится не больше N-199 элементов N).

В итоге |N| не больше 99*33+199=3466 (примерно ⅓ от общего числа клеток).

Всего белых клеток как минимум 100*100-|T|=9000.

Таким образом, шанс попасть в множество N строго меньше ½.

Критерии

- 1 балл за верный ответ
- 3 балла за решение без топей (строгое решение с пояснением и доказательством, идея на схеме – 2 балла)

Итого, без объяснения, как влияют топи – не больше 4 баллов

- 2 балла – пояснение, как влияют топи букв ТИГР
- 2 балла – пояснение, как влияет нижний квадрат топи, размер 3*7
- расчет вероятностей преимущества хода отдельного игрока – 2 балла

6. (20 баллов) «Не пей эту воду»

Иванушка-дурачок идёт на бой к Кощею-Бессмертному. Бой заключается в том, что каждый предлагает другому стакан воды – либо чистой (0), либо ядовитой (1-10), и противник обязан ее выпить. Ядовитая вода с более старшим номером нейтрализует ядовитую воду с более младшим номером. Чистая вода ни на что не влияет. Источник наиболее ядовитой, 10-й воды находится в пещере у Кощея. Как Иван, так и Кощей также могут выпить стакан любой доступной им воды как до, так и после встречи. (Можно даже выпить стакан до встречи, стакан противника и потом - стакан после.) Какие шансы у Ивана и у Кощея, соответственно (быть живыми после дуэли)?

(20 points) “Do not drink this water”

Ivanushka the Fool goes to the battle with Kashchei-the Immortal. The fight is organized as follows: each offers the opponent a glass of water, either pure (0) or poisonous (1-10), and the opponent have to drink it. Poisonous water with a higher number neutralizes poisonous water from a lower number. Clean water does not affect anything. The source of the most poisonous, 10^{th}, water is located in Koschei’s cave. Both Ivan and Koschey can also drink a glass of any water available to them both before and after the meeting. (They can even drink a glass before the meeting, a glass of the enemy and then a glass after.) What are the chances for Ivan and Koshchey, respectively (to be alive after the duel)?

РЕШЕНИЕ

Важные замечания по формулировке условия:

1. Яд 10 доступен только Кощею.
2. Игроки успеют запить ядовитую воду – яд действует не мгновенно.
3. Для нейтрализации яда важно именно запить воду, а не выпить в любом порядке.

Игра разбивается на две независимые игры: — попытка Иванушки убить Кощея и защита Кощея; — «атака» Кощея и защита Иванушки. Каждую из этих игр можно считать антагонистической — цели игроков противоположны.

Разберем подробнее первую из этих игр — «убить Кощея». У Иванушки 10 стратегий — налить Кощею простой воды или одного из доступных ему 9 ядов. У Кощея 21 стратегия — выпить любой из 10 ядов перед дуэлью, выпить любой из ядов после нее и не делать ничего. Часть из этих стратегий заведомо невыгодна: например, стратегия «выпить яд № 10 перед дуэлью» наверняка приведет к смерти и поэтому не будет использоваться. Легко проверить, что равновесий в чистых стратегиях в этой игре нет. Действительно, равновесие в чистых стратегиях означает, что либо Иванушка может гарантированно убить Кощея, либо Кощей может гарантированно выжить, а это не так. Опишем равновесие в смешанных стратегиях. Иванушка с равной вероятностью дает Кощею либо воду, либо яд № 9. Чтобы выжить, в первом случае Кощей должен ничего не пить, а во втором либо выпить перед дуэлью яд с меньшим номером, либо запить ядом № 10. Но защититься от обеих стратегий Кощей не может никак. Поэтому Иванушка может добиться смерти Кощея с вероятностью 1/2. Но и Кощей может спастись от смерти с вероятностью 1/2, если он будет с равной вероятностью либо ничего не делать, либо запивать полученный от Иванушки стакан 10-м ядом. У Иванушки нет стратегии, убивающей Кощея в обоих случаях. Поэтому приведенные стратегии Иванушки и Кощея дают равновесие Нэша. Никто из них не может добиться вероятности выигрыша больше 1/2, поэтому менять стратегии невыгодно. Вообще, равновесий Нэша в смешанных стратегиях в этой игре много, но все они (и это несложно проверить) дают один и тот же исход: (1/2, 1/2).

Игра «убить Иванушку» чуть сложнее. В ней существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях, позволяющее Кощею выиграть с вероятностью 2/3, т. е. при полной информированности игроков Кощей имеет в игре небольшое преимущество. В равновесии Кощеем будут даваться три воды, например: 0,1,9. Матрица получается такая, что для любой воды Кощея, только различный тип стратегий спасает Ивана: от 0 спасает 0, от 1 спасают 2,3,…,9 выпитая после, от 9 спасают 1,2,…,9 выпитые до. Равновесные вероятности 1/3 для каждой воды Кощея. Поэтому вероятность выжить для Иванушки 1/3.

Критерии

За разумную попытку построить стратегию защиты Кощея:	2 балла.
За решение одной из игр с ошибкой или неполным описанием стратегий:	5 баллов.
За решение одной из игр без ошибок:	10 баллов.