

# Задачи на студенческую олимпиаду

Vladimir Lebedev

Предлагаю следующие задачи.

1. *Механика*. 20 баллов

Сферическая планета, на которой отсутствует атмосфера, имеет радиус  $R = 1000 \text{ km}$ . В ней имеется пустая сферическая полость радиуса  $R/2$ , центр которой расположен на расстоянии  $R/2$  от центра планеты в направлении северного полюса. Остальная часть планеты равномерно заполнена веществом с плотностью  $\rho = 5 \text{ g/cm}^3$ . На северном полюсе имеется ведущее в полость отверстие, в которое проваливается космонавт. Найти время, за которое он достигнет центра планеты. Какова будет его скорость в этот момент?

**Решение задачи 1**

Ускорение свободного падения внутри равномерно заполненного веществом шара равно

$$\frac{4\pi}{3}G\rho r,$$

где  $r$  – расстояние до центра шара. Планету можно представить, как наложение шара радиуса  $R$  с плотностью  $\rho$  и шара радиуса  $R/2$  (с центром на расстоянии  $R/2$  от центра планеты) и плотностью  $-\rho$ . Вычисляя ускорение свободного падения на прямой, вдоль которой космонавт падает к центру, как суперпозицию ускорений свободного падения указанных шаров, находим, что это ускорение не зависит от координат и равно

$$g = \frac{2\pi}{3}G\rho R = 0.7 \text{ m/s}^2.$$

В соответствии с законами равноускоренного движения

$$t = \sqrt{2R/g} = 1.7 \cdot 10^3 \text{ s}, \\ v = \sqrt{2gR} = 1.2 \text{ km/s}.$$

2. *Термодинамика*. 20 баллов

В замкнутом сосуде объемом 10 литров при температуре 100 градусов Цельсия находится газовая смесь, включающая азот, кислород и водяной пар, давление которой равно  $P = 1 \text{ атм}$ . При охлаждении смеси до 10 градусов Цельсия давление в сосуде упало вдвое. Найти количество воды, которая сконденсировалась при этом процессе. Примечание: давление насыщенных паров воды при 10 градусов Цельсия считать пренебрежимо малым.

**Решение задачи 2**

Давление смеси азота и кислорода при температуре 10 градусов Цельсия ( $T_2 = 283 \text{ K}$ ) равно половине атмосферы,  $P_2 = 0.5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ . Поэтому при температуре 100 градусов Цельсия ( $T = 373 \text{ K}$ ) эта смесь имеет парциальное давление  $P_3 = (T/T_2)P_2$ . Парциальное

давление паров воды  $P_1$  при температуре 100 градусов Цельсия равно, следовательно,  $P_1 = P - (T/T_2)P_2$ , где  $P = 10^5 \text{ Н/м}^2$  (одна атмосфера). Массу водяного пара (который полностью сконденсировался в воду) можно найти, используя газовый закон

$$P_1 V = \frac{m}{\mu} RT. \quad (1)$$

Здесь  $R = 8.3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{K)}$  – газовая постоянная, для воды  $\mu = 0.018 \text{ Кг/моль}$ ,  $V = 10^{-2} \text{ м}^2$ . Таким образом

$$m = \frac{V\mu}{RT} \left( P - \frac{T}{T_2} P_2 \right). \quad (2)$$

Подставляя все числа, находим  $m = 2 \text{ г}$ .

3. *Электричество и магнетизм*. 20 баллов

Цилиндрический соленоид имеет радиус  $r = 2 \text{ см}$ , длину  $l = 40 \text{ см}$  и число витков  $N = 5 \cdot 10^4$ . Сопротивление соленоида на нулевой частоте равно  $R = 5 \text{ ом}$ . К соленоиду в момент времени  $t = 0$  подключают постоянное напряжение  $V = 500 \text{ вольт}$ . Найти мощность тепловых потерь внутри соленоида в момент времени  $t = \tau$ , где  $\tau = 0.1 \text{ с}$ .

**Решение задачи 3**

Индуктивность соленоида определяется выражением

$$L = \mu_0 N^2 (\pi r^2) / l, \quad (3)$$

где  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная. При заданных параметрах задачи отношение индуктивности соленоида  $L$  к  $\tau$  намного превосходит  $R$ . Поэтому на интервале  $0 < t < \tau$  ток через соленоид будет линейно расти со временем в соответствии с законом  $V = LdI/dt$ . В момент времени  $t = \tau$  ток будет равен  $I = V\tau/L$ . Выделяющаяся тепловая мощность равна

$$RI^2 = RV^2\tau^2/L^2, \quad (4)$$

что после подстановки всех значений дает 130 Вт.

4. *Колебания и волны* 20 баллов

Закон дисперсии ротонов в сверхтекучем гелии-4 имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{(k - k_0)^2}{2\sigma},$$

где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновой вектор,  $\omega_0 = 1.1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $k_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-1}$ ,  $\sigma = 1.6 \cdot 10^7 \text{ с/м}^2$ . Сверхтекучий гелий при нулевой температуре течет по капилляру со скоростью  $v = 0.2 \text{ м/с}$ . Найти  $\omega_{min} - \omega_0$ , где  $\omega_{min}$  – минимальная частота ротонов, которая может быть зафиксирована выше по течению от их источника.

**Решение задачи 4**

Ротон распространяется со групповой скоростью

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k - k_0}{\sigma}.$$

Эта величина должна быть больше, чем скорость течения  $v$ , что дает минимальную частоту

$$\omega_{min} - \omega_0 = \frac{\sigma v^2}{2}.$$

Подстановка численных значений дает  $\omega_{min} - \omega_0 = 3.2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

5. *Атомная физика* 20 баллов

Электрон в полупроводнике может связываться с положительно заряженным примесным атомом. Найти эффективную массу электрона, если энергия связи электрона равна  $1.36 \cdot 10^{-2}$  эв., а относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника равна  $\epsilon = 20$ .

**Решение задачи 5**

Энергию связи электрона с примесным атомом можно найти по той же формуле, что и энергию связи атома водорода, то есть

$$E = m_* e^4 / (h^2 \epsilon_0^2 \epsilon^2). \quad (5)$$

Здесь  $m_*$  – эффективная масса электрона в полупроводнике,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $h$  – постоянная Планка,  $e$  – заряд электрона, а множитель  $\epsilon^{-2}$  связан с ослаблением электрического взаимодействия в среде с конечной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Энергия связи атома водорода равна 13.6 эв, то есть энергия связи электрона с примесным атомом в тысячу раз меньше. Поэтому, сравнивая выражение (5) с выражением для энергии связи атома водорода ( $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  Кг – масса электрона)

$$E_H = m e^4 / (h^2 \epsilon_0^2), \quad (6)$$

находим  $m_* = 0.4m = 3.6 \cdot 10^{-31}$  Кг.