

**Олимпиада для студентов и выпускников — 2019 г.
по направлению «Математика»**

Профили:

«Математика»

«Математика и математическая физика»

Время выполнения задания — 240 минут

Решение каждой задачи оценивалось согласно следующим общим критериям:

- 100% баллов за задачу – дано полное решение задачи;
- 75% баллов за задачу – дано решение задачи с пробелами технического характера (т.е. связанными с владением техникой в предметной области задачи);
- 50% баллов за задачу – в решении задачи получены значительные продвижения, но имеются концептуальные пробелы (т.е. связанные с владением понятийным аппаратом в предметной области задачи);
- 25% баллов за задачу – попытка решения в целом не успешна, но содержит верные соображения;
- До 25% баллов за задачу может сниматься за арифметические ошибки, не меняющие ход решения, за некорректное использование математических обозначений и за другие недочеты, не связанные с содержательной частью решения.
- Ответ, приведенный без обоснования, оценивается в 0 баллов, вне зависимости от того, верный он или нет.

Помимо этого, для задач, в решениях которых встречались типичные ошибки и пробелы, ниже указано, как они оценивались.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Сколько всего осей симметрии может быть у эллипса? Обоснуйте свой ответ.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- 3 балла: предъявлено 2 оси, не доказано, что других нет.

РЕШЕНИЕ. Если эллипс — окружность, у него бесконечно много осей симметрии. Если эллипс — не окружность, две его главные оси являются осями симметрии, и никаких других осей симметрии у него нет, поскольку любая симметрия переводит в себя большой диаметр — отрезок, соединяющий две наиболее удалённые друг от друга точки эллипса — и, стало быть, её ось либо содержит большой диаметр, либо является срединным перпендикуляром к нему.

2. Пусть $f(x)$ многочлен. Верно ли, что если многочлен $f(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$, делится на $x - 1$, то он делится и на $x^n - 1$?

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- 10 баллов: задача решена в предположении, что $f(x)$ делится на $x - 1$, но справедливость этого предположения не доказана.

РЕШЕНИЕ. Да, верно. Если $f(x^n) = (x - 1)q(x)$, то $f(1) = f(1^n) = 0$. Следовательно, $f(x)$ делится на $x - 1$, то есть $f(x) = (x - 1)r(x)$. Отсюда $f(x^n) = (x^n - 1)r(x^n)$.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

3. Последовательность x_n с положительными членами монотонно возрастает и ограничена. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}} - \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}} \right)?$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- 3 балла: слагаемое преобразовано к виду $(x_{n+1} - x_n)/\sqrt{x_n x_{n+1}}$.
- 10 баллов: ход решения в целом верный, но отсутствуют доказательства существенных импликаций.
- 15 баллов: верно найден мажорирующий ряд, но допущена ошибка при нахождении его суммы.

РЕШЕНИЕ. Да, сходится:

$$\sum_{n=1}^m \left(\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}} - \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}} \right) = \sum_{n=1}^m \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{x_n x_{n+1}}} < \frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^m (x_{n+1} - x_n)$$

и правый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = -x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ сходится, поскольку последовательность x_n монотонно возрастает и ограничена, а значит, имеет предел.

4. Даны две квадратные матрицы A и B такие, что $AB = A + B$. Следует ли отсюда, что матрицы A и B коммутируют, то есть $AB = BA$?

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- 3 балла: есть содержательное утверждение про общие собственные векторы 7. Задача сведена к доказательству обратимости матрицы $E - A$ или $E - B$, но сама обратимость не доказана.
- 10 баллов: установлено, что $(B - E)(A - E) = E$.

РЕШЕНИЕ. Да, следует. Поскольку $(E - A)(E - B) = E - (A + B) + AB = E$, матрицы $(E - A)$ и $(E - B)$ обратны друг другу и, следовательно, коммутируют. Поэтому и исходные матрицы $A = E - (E - A)$ и $B = E - (E - B)$ тоже коммутируют.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. «Математика»

1. Пусть ρ – двумерное комплексное представление конечной группы G (то есть гомоморфизм групп $\rho: G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$) такое что $\rho(g)$ имеет собственное значение 1 для всех $g \in G$. Верно ли, что ρ является суммой двух одномерных представлений?

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- 5 баллов: доказано, что все операторы $\rho(g)$ диагонализуются
- 5 баллов: доказано, что утверждение задачи равносильно коммутативности $\rho(G)$

РЕШЕНИЕ. Да, верно. Так как каждый элемент группы G удовлетворяет уравнению $g^n = 1$, где $n = |G|$ – порядок группы G , каждый оператор $\rho(g)$ аннулируется многочленом $t^n - 1$, который является произведением n различных линейных множителей. Следовательно, каждый оператор $\rho(g)$ диагонализуем. Поэтому из условия задачи вытекает, что если $\det \rho(g) = 1$, то $\rho(g) = E$, то есть гомоморфизм $\det: \rho(G) \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ инъективен. Следовательно, группа $\rho(G)$ абелева. Любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов можно одновременно диагонализировать в одном общем для всех операторов базисе. Это задаёт разложение представления ρ в прямую сумму одномерных.

2. Существует ли на интервале $[0, 1]$ непрерывная функция f , такая что $\int_0^1 x f(x) dx = 1$ и $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ для всех $n > 1$?

РЕШЕНИЕ. Нет, не существует. Положим $g(x) = x f(x)$. Из условия задачи вытекает, что непрерывные в топологии равномерной сходимости функционалы $F, G: C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F: h(t) \mapsto h(0), \quad G: h(t) \mapsto \int_0^1 h(t)g(t) dt,$$

совпадают на подпространстве многочленов. Так как по теореме Вейерштрасса это подпространство плотно, $F = G$ всюду на $C^0([0, 1])$. Поскольку

$$0 = g(0) = F(g) = G(g) = \int_0^1 g^2(t) dt,$$

непрерывная функция g тождественно нулевая. Это противоречит равенству

$$\int_0^1 g(t) dt = 1.$$

2. «Математика и математическая физика»

1. На конце тонкого, невесомого и нерастяжимого стержня закреплен массивный шарик пренебрежимо малых размеров. Стержень с шариком стоит вертикально у стены, упираясь нижним концом в угол, образованный стеной и полом. В некоторый момент шарiku сообщают пренебрежимо малую скорость в горизонтальном направлении перпендикулярно стене и стержень начинает падать. Найдите угол между вектором скорости шарика и вертикалью в момент удара шарика о пол. Трение в системе отсутствует.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- Уравнение движения шарика в начальные моменты времени, осознание факта, что шарик не будет двигаться по окружности все время до соударения с полом. До 5 баллов.
- Расчет предельного угла отклонения стержня, до которого шарик будет двигаться по окружности, а стержень будет упираться в угол стены и пола. До 12 баллов.
- Описание характера последующего движения шарика, нахождение модуля его полной скорости в момент падения на пол и верное решение всей задачи. До 20 баллов.

РЕШЕНИЕ. Движение шарика можно разбить на два этапа. Сначала шарик некоторое время будет двигаться по окружности радиуса ℓ (длина стержня) под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$, направленной вертикально вниз, и силы упругости сжатого стержня $\vec{N}$, направленной вдоль стержня от центра его вращения. Центр вращения — нижний конец стержня, упирающийся в угол между стеной и полом. Запишем уравнение движения шарика в проекции на радиальную ось, проходящую через шарик и центр вращения в момент, когда угол между стержнем и вертикалью равен α :

$$\frac{mv^2}{\ell} = mg \cos \alpha - N,$$

где N — модуль силы упругости деформированного стержня, mv^2/ℓ — центростремительное ускорение шарика, v — модуль скорости, которую успел набрать шарик к данному моменту времени. Поскольку $N \geq 0$, то из выписанного уравнения движения находим

предельный угол α_0 отклонения стержня (отвечает $N = 0$), при котором шарик еще движется по окружности, а стержень упирается в угол стены и пола:

$$\cos \alpha_0 = \frac{v_0^2}{\ell g}.$$

Модуль скорости шарика v_0 , которой он будет обладать к моменту отклонения стержня на угол α_0 , найдем из закона сохранения механической энергии:

$$mg\ell = \frac{mv_0^2}{2} + mg\ell \cos \alpha_0.$$

В этом равенстве учтено, что сила упругости $\vec{N}$ при движении шарика по дуге окружности все время перпендикулярна его скорости и, как следствие, работы не совершает.

Из двух последних равенств имеем:

$$\cos \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad v_0^2 = \frac{2}{3} \ell g.$$

Последующее движение шарика будет представлять собой свободное падение по дуге параболы под действием силы тяжести. Стержень при этом останется недеформированным, оторвется от стены и не будет оказывать влияния на движение шарика. Как следствие, горизонтальная составляющая скорости шарика $v_0 \cos \alpha_0$ не будет меняться вплоть до удара шарика о пол. Модуль полной скорости шарика V в момент падения также находится из закона сохранения механической энергии $V^2 = 2\ell g$. Таким образом, синус угла β между вектором полной скорости шарика и вертикалью в момент удара шарика о пол, имеет следующее значение

$$\sin \beta = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{V} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

2. Точечный электрический заряд q расположен на расстоянии ℓ от центра заземленной проводящей сферы радиуса $R < \ell$.

- а) Найдите силу электростатического взаимодействия сферы и точечного заряда q .
- б) Найдите поверхностную плотность индуцированных на сфере зарядов в точке пересечения поверхности сферы и прямой, проходящей через ее центр и заряд q .

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

- Применение метода зеркальных изображений для нахождения величины и положения фиктивного точечного заряда, поле которого вне сферы совпадает с полем индуцированных зарядов. Вычисление на этой основе силы взаимодействия сферы и внешнего заряда. До 8 баллов.
- Применение теоремы Гаусса для вычисления плотности поверхностного заряда в указанной в условии точке сферы и верное решение всей задачи. До 20 баллов.

РЕШЕНИЕ. а) Под действием электростатической силы Кулона со стороны заряда q на поверхности заземленной сферы будет индуцирован суммарный заряд Q противоположного знака. Индуцированные заряды неравномерно распределятся по поверхности сферы таким образом, чтобы потенциал любой точки заземленной сферы остался равным нулю (этот потенциал равен сумме потенциала, создаваемого в этой точке внешним зарядом q и индуцированными на сфере зарядами).

Силу взаимодействия индуцированных зарядов сферы и заряда q проще всего найти, если воспользоваться методом зеркальных изображений. В соответствии с этим методом, поле индуцированных зарядов *вне* сферы эквивалентно полю точечного заряда Q , расположенного *внутри* сферы на отрезке прямой, соединяющей центр сферы и внешний

заряд q . Расстояние r от этого фиктивного точечного заряда до центра сферы, а также его величину Q , можно найти, приравняв нулю потенциал точки А сферы, ближайшей к заряду q (точка пересечения поверхности сферы и прямой, проходящей через ее центр и заряд q) и диаметрально противоположной точки В:

$$\phi_A = \frac{q}{\ell - R} + \frac{Q}{R - r} = 0, \quad \phi_B = \frac{q}{\ell + R} + \frac{Q}{R + r} = 0.$$

Из этих уравнений находим r и Q :

$$r = \frac{R^2}{\ell}, \quad Q = -q \frac{R}{\ell}.$$

Отсюда модуль силы электростатического притяжения сферы и заряда q дается выражением:

$$F = \frac{|qQ|}{(\ell - r)^2} = q^2 \frac{R\ell}{(\ell^2 - R^2)^2}.$$

б) Пусть для определенности внешний заряд q положителен. Тогда электростатическое поле вне сферы в бесконечно малой окрестности точки А (точки пересечения поверхности сферы и прямой, проходящей через ее центр и заряд q) находится как суперпозиция полей точечных зарядов q и Q , направлено к центру сферы (для случая $q > 0$) и по модулю равно:

$$|\vec{E}_A| = \frac{q}{(\ell - R)^2} + \frac{qR}{\ell(R - r)^2} = \frac{q}{(\ell - R)^2} \left(1 + \frac{\ell}{R}\right).$$

Внутри сферы поле равно нулю.

Поверхностную плотность σ_A индуцированных на сфере зарядов в точке А найдем по теореме Гаусса. Для этого окружим точку А замкнутой цилиндрической поверхностью малой высоты h и малой площади основания ΔS . Устремляя h и ΔS к нулю, мы легко вычислим поток электрического поля через эту поверхность: $\Delta\Phi = -|\vec{E}_A|\Delta S$ (ненулевой поток будет только через дно цилиндра вне сферы, знак отражает противонаправленность векторов суммарного электростатического поля и внешней нормали к поверхности). Согласно теореме Гаусса, этот поток пропорционален охватываемому поверхностью заряду:

$$\Delta\Phi = 4\pi\sigma_A\Delta S.$$

Подставляя значение потока и напряженности поля $|\vec{E}_A|$, получаем ответ:

$$\sigma_A = -\frac{q}{4\pi(\ell - R)^2} \left(1 + \frac{\ell}{R}\right).$$