Математика 9 класс

(Тур длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

20 1. Дан прямоугольник с длинами сторон 5 и 6. Разбейте его на семь неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными стонорам исходного прямоугольника так, чтобы площади этих семи прямоугольников были попарно различны.

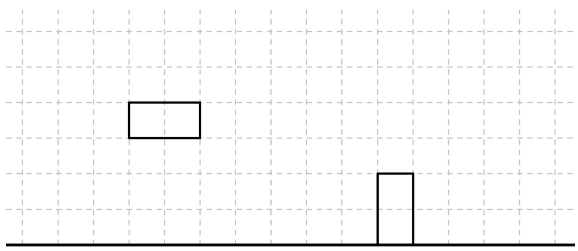
20 2. Докажите, что число $10^{(10^{(10^{2013})})}+10^{(10^{2013})}+10^{2013}-1$ - не простое.

26 3. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы одновременно выполнялись два условия: а) центр круга находился на границе каждой из частей, б) из некоторых частей можно было бы составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник?

26 4. Найдите все целочисленные решения уравнения $2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

27 5. Сколько существует различных (т.е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 24? Выпишите длины трех сторон всех этих треугольников и докажите, что других не бывает.

28 6. Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки (см. рисунок). Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечётное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию, если нет, то докажите, что нельзя.



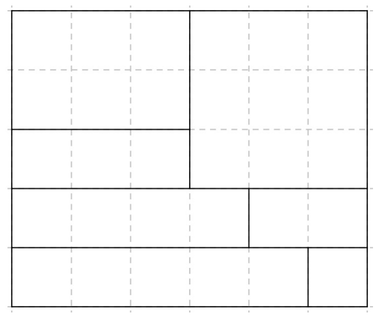
7. Таблица $n\times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 10,\ f(11) = 0$.

22 а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

23 б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?

Ответы, указания, решения.

1. **Ответ**:



2. **Ответ:** Делится на 11.

Решение.

$$10^{(10^{(10^{2013})})} + 10^{(10^{2013})} + 10^{2013} - 1 = 100^a - 1 + 10^{2013}(10^b + 1),$$

где $a = 10^{(10^{2013})}/2$ и $b = (10^{2013} - 2013)$ — натуральные числа. Используя разложение на множители выражений вида $a^n \pm b^n$, получаем

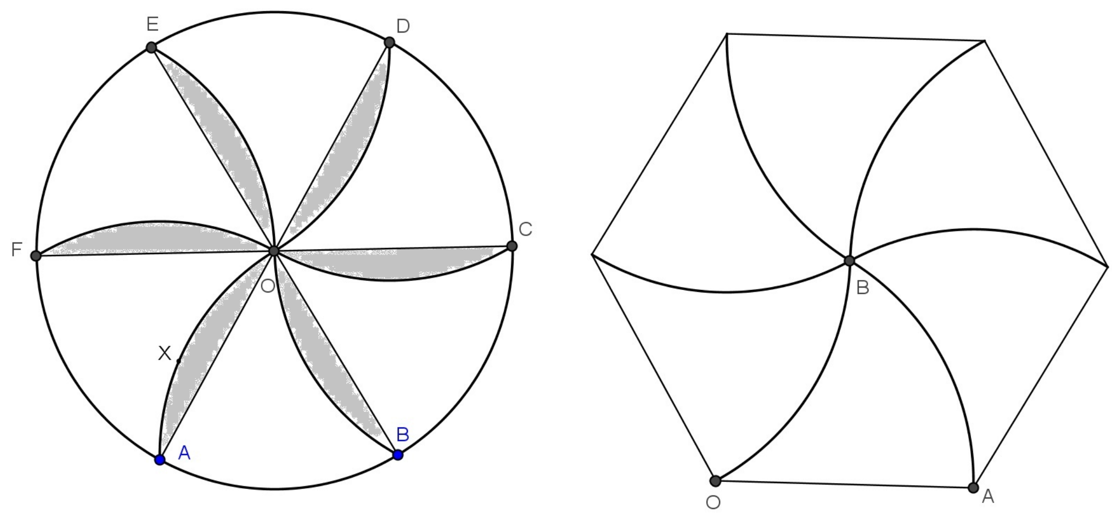
$$100^a - 1 = (100 - 1)(100^{a-1} + 100^{a-2} + \cdots + 100 + 1) \text{ — делится на 11,}$$

и

$$10^b + 1 = (10 + 1)(10^{b-1} - 10^{b-2} + \cdots \pm 1) \text{ — делится на 11.}$$

3. **Ответ:** Можно.

Решение. См. рисунок. Здесь точки A, B, C, D, E, F делят окружность на 6 равных дуг. Поскольку $BA = BO = r$, можно построить дугу AXO с центром в точке B и концами в точках A, O. Остальные дуги с концами в точке O строятся аналогично. Эти дуги равны дугам, на которые окружность делится точками A, B, C, D, E, F. Удалим теперь затемнённые части, и повернём криволинейный треугольник AOB на $120°$ вокруг центра треугольника AOB, так, чтобы его вершина B перешла в центр круга. Аналогично повернём остальные криволинейные треугольники. В результате получим правильный шестиугольник на рисунке справа.



4. **Решение**. Поскольку левая часть уравнения - целое число, то и правая - целое число, т.е. $x + y \geq 0$. Если $x + y > 0$, то правая часть уравнения - чётное

число, значит и левая часть чётное число, т.е. y делится на 2. Пусть $y = 2y_1$, где y_1 - целое число. Подставляя, получаем $2x^2 - 4y_1^2 = 2^{x+2y_1} \Rightarrow x^2 - 2y_1^2 = 2^{x+2y_1-1}$. Если справа показатель степени опять больше нуля, то правая (а значит и левая) часть - снова чётное число, откуда $x = 2x_1$. После подстановки и сокращения получаем $2x_1^2 - y_1^2 = 2^{2x_1+2y_1-2}$. Повторяя это рассуждение, будем делить уравнение на 2 до тех пор, пока в правой части показатель степени не станет равным 0. Рассмотрим два случая.
1) Показатель стал равным 0 через чётное количество сокращений. Пусть всего было сделано $2k$ сокращений. Тогда $x = 2^k r,\ y = 2^k s$, и получаем уравнение $2r^2 - s^2 = 2^{2^k r + 2^k s - 2k}$. Поскольку в показателе стоит 0, уравнение распадается в систему:

$$\left\{\begin{array}{l} 2r^2 - s^2 = 1 \\ 2^k(r+s) - 2k = 0 \end{array}\right. .$$

Рассмотрим второе уравнение. Из него следует, что $\frac{k}{2^{k-1}} = r + s$ - целое число. Это возможно лишь при $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$. (Если $k > 2$, то $0 < \frac{k}{2^{k-1}} < 1$. Это можно доказать по индукции: при $k = 3$ это верно, и если $\frac{k}{2^{k-1}} < 1$, то $0 < \frac{k+1}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}} \cdot \frac{k+1}{2k} < \frac{k}{2^{k-1}} < 1$).
При $k = 0$ (т.е. если в исходном уравнении $x + y = 0$) имеем:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{array}\right. .$$

Решая эту систему, получаем два решения исходного уравнения: $(-1,\ 1)$ и $(1,\ -1)$.
При $k = 1$ имеем:

$$\left\{\begin{array}{l} 2r^2 - s^2 = 1 \\ r + s = 1 \end{array}\right. .$$

У этой системы нет решений.
При $k = 2$ получаем такую же систему, у которой тоже нет решений.
2) Показатель стал равным 0 через нечётное количество сокращений. Пусть всего было сделано $2k - 1$ сокращений. Тогда $x = 2^{k-1} r,\ y = 2^k s$ и получаем уравнение $r^2 - 2s^2 = 2^{2^{k-1} r + 2^k s - 2k + 1}$. Поскольку в показателе стоит 0, уравнение распадается в систему:

$$\left\{\begin{array}{l} r^2 - 2s^2 = 1 \\ 2^{k-1} r + 2^k s - 2k + 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Из второго уравнения следует, что $\frac{2k-1}{2^{k-1}} = r + 2s$ - целое число. Это возможно только при $k = 1$, т.к. при $k > 1$ в числителе дроби - нечётное число, а в знаменателе - чётное. При $k = 1$ получаем

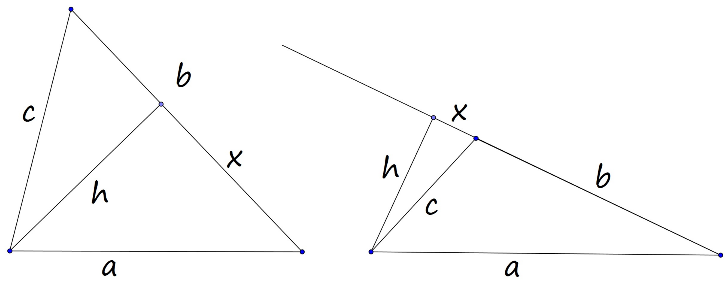
$$\left\{\begin{array}{l} r^2 - 2s^2 = 1 \\ r + 2s = 1 \end{array}\right. .$$

Решая эту систему и учитывая, что $x = r,\ y = 2s$, получаем два решения исходного уравнения: $(1, 0)$ и $(-3, 4)$.

5. **Ответ:** Шесть различных треугольников со следующими наборами сторон: $(8, 8, 8)$, $(9, 8, 7)$, $(9, 9, 6)$, $(10, 9, 5)$, $(10, 10, 4)$, $(11, 11, 2)$.

Решение. Три числа $a \geq b \geq c > 0$ являются сторонами остроугольного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2 + c^2$. Докажем это.
Если $a \geq b \geq c$ — стороны остроугольного треугольника, то, опуская высоту на сторону b (см. рисунок слева), имеем $h < c,\ x < b$, откуда $a^2 = h^2 + x^2 < c^2 + b^2$. Обратно, пусть $a \geq b \geq c > 0$ и $a^2 < b^2 + c^2$. Тогда $a^2 < (b + c)^2 \Rightarrow a < b + c$, т.е. a, b, c — стороны треугольника. Если угол против стороны a тупой или прямой,

то, опуская высоту на продолжение стороны b (см. рисунок справа), получаем $a^2 = h^2 + (b+x)^2 = h^2 + x^2 + b^2 + 2bx = c^2 + b^2 + 2bx \geq b^2 + c^2$ — противоречие. Значит угол против стороны a острый.



Вернёмся к условию задачи. Пусть $a \geq b \geq c$ - целочисленные стороны остроугольного треугольника с периметром 24. Тогда $3a \geq a + b + c = 24 \Rightarrow a \geq 8$. Из неравенства треугольника $a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 24 \Rightarrow a < 12$. Значит a может равняться одному из чисел $8, 9, 10, 11$. Далее, при фиксированном a из неравенства $b \geq c$ получаем $2b \geq b + c = 24 - a \Rightarrow b \geq \frac{24-a}{2}$.
Для каждого $a = 8, 9, 10, 11$ выпишем все пары (b, c) с условием $a \geq b \geq \frac{24-a}{2}$, и отберём из них те, для которых треугольник остроугольный.

Если $a = 8$, то $b = c = 8$, и соответствующий треугольник равносторонний.

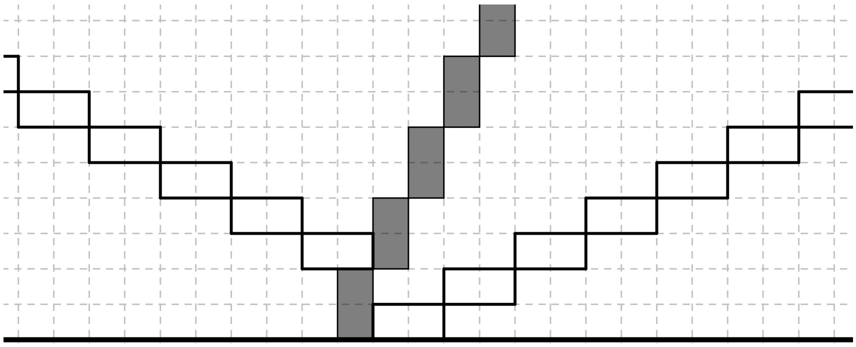
Если $a = 9$, то $9 \geq b \geq 8$, т.е. имеем две пары (b, c): $(9, 6)$ и $(8, 7)$. Проверяя, получаем, что в обоих случаях выполнено неравенство $b^2 + c^2 > a^2$.

Если $a = 10$, то $10 \geq b \geq 7$, т.е. имеем четыре пары (b, c): $(10, 4)$, $(9, 5)$, $(8, 6)$, $(7, 7)$. Проверяя, получаем, что только в первых двух выполнено неравенство $b^2 + c^2 > a^2$.

Если $a = 11$, то $11 \geq b \geq 7$, т.е. имеем пять пар (b, c): $(11, 2)$, $(10, 3)$, $(9, 4)$, $(8, 5)$, $(7, 6)$. Проверяя, получаем, что только в первой выполнено неравенство $b^2 + c^2 > a^2$.

6.**Ответ:** Можно.

Решение. Это можно сделать разными способами. Покажем, с помощью какого рассуждения можно найти искомое расположение. Будем называть костяшку домино горизонтальной, если её наибольшая сторона параллельна границе полуплоскости, и вертикальной в ином случае. Условие задачи эквивалентно следующему: каждая прямая, перпендикулярная границе полуплоскости, пересекает нечётное количество горизонтальных костяшек, а каждая прямая, параллельная границе полуплоскости, пересекает нечётное число вертикальных костяшек.
Теперь несложно построить требуемое расположение. Расположим вначале вертикальные костяшки так, чтобы каждая горизонтальная прямая пересекала ровно одну из них (на рисунке эти костяшки затемнены):



Теперь добавим горизонтальные костяшки так, чтобы каждая вертикальная прямая пересекала ровно одну из них. Требуемое расположение построено.

7.**Ответ:**

а) $f(9) > f(10)$,

б) $f(6) > f(5)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad g(t) = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \\ \hline \end{array}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g: S_{10} \to S_9$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_9. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_9$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{10}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_9 \\ \hline b_1 \; b_2 \; b_3 \cdots \quad \cdots \quad b_9 & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_9, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_9, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 9 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 10\}$, т.е. для a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_9$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_9$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. $\square$

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{10}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. *Существует таблица* $y \in S_9$ *такая, что* $\forall x \in S_{10} :\ g(x) \neq y$.

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_9$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \ldots, 9$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}\,.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 10$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. $\square$

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_9 больше элементов, чем в S_{10}, т.е. $f(9) > f(10)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{10}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{10} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_9, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_9 больше, чем в S_{10}.

б) Докажем, что при отображении $g :\ S_6 \to S_5$ в каждую таблицу множества S_5 отображается более одной таблицы множества S_6. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица* $y \in S_5$*. Тогда существует не менее 4 различных таблиц* $x \in S_6$ *таких, что* $g(x) = y$.

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|ccccc|c|}\hline &&&&& a_1\\ &&&&& a_2\\ &&y&&& a_3\\ &&&&& a_4\\ &&&&& a_5\\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & c\\ \hline \end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_5$ построить не менее 4 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 9 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $5 + 4 = 9$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 5$, не более 9 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_6, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 6 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 4 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 4, что и требовалось доказать. $\square$