

Математика 10 класс

(Тур длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 20 1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?
- 20 2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C , пересекаются в точке B_1 . На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.
- 26 3. Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке справа конь, отмеченный буквой K , может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)
В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму).
- 26 4. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы одновременно выполнялись два условия: а) центр круга находился на границе каждой из частей, б) из некоторых частей можно было бы составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник?
5. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x , является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство
- $$f(x) + f(10 - x) = 4.$$
- 14 а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
- 14 б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

баллы задачи

6. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c , и вычислил $x = \text{НОД}(a, b)$, $y = \text{НОД}(b, c)$, $z = \text{НОД}(c, a)$. Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

6, 8, 12, 18, 24

27

14, 20, 28, 44, 56

5, 15, 18, 27, 42

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x , одно из чисел во втором ряду равно y , одно из чисел в третьем ряду равно z , и попросил угадать числа x, y, z . Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z) .

7. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 10$, $f(11) = 0$.

- 22 а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

- 23 б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?

Ответы, указания, решения.

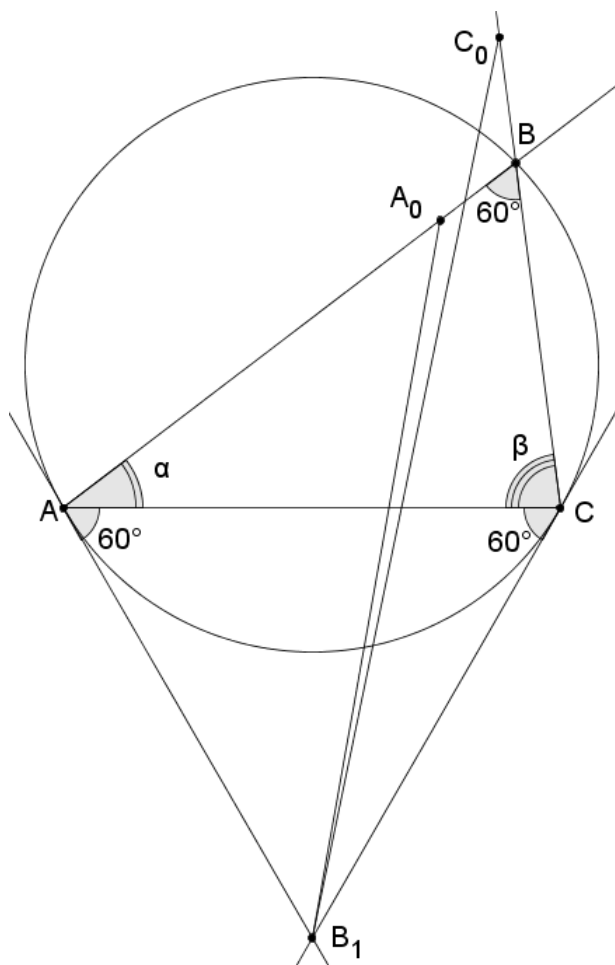
1. **Ответ:** Могут.

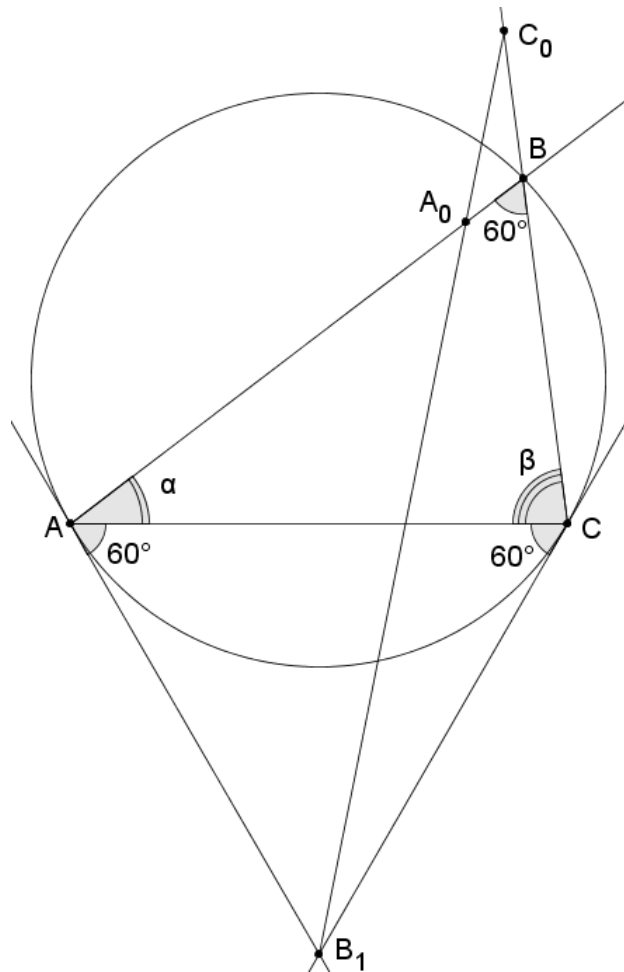
Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3$. Выберем q так, чтобы числа $1, q, q^3$ образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1 + q^3 = 2q \Leftrightarrow (q^2 + q - 1)(q - 1) = 0$. Один из корней этого уравнения равен $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа $1, q, q^3$ удовлетворяют условию задачи.

2. **Решение.** По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1 = \angle CAB_1 = \angle ABC = 60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C — равносторонний. Тогда $AA_0 = AC = AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, то получим $\angle AB_1A_0 = \frac{180 - (60 + \alpha)}{2} = \frac{120 - \alpha}{2}$. Отсюда в частности следует, что $\angle AB_1A_0 < 60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$, см. рисунок слева. Аналогично $\triangle C_0CB_1$ равнобедренный, и $\angle CB_1C_0 = \frac{120 - \beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = \frac{240 - (\alpha + \beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = 60^\circ = \angle AB_1C$, следовательно лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рисунок справа), что и требовалось.





3. **Ответ:** 2.

Решение. Занумеруем клетки как показано на рисунке 1. Конь может из любой клетки попасть в любую клетку с таким же номером, и не может попасть в другие.

2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...

Рис. 1

Таким образом, все клетки разбились на 4 множества, так что конь не может перескочить из одного множества в другое, но может свободно перемещаться внутри одного множества.

Добавим две клетки как на рисунке 2. Докажем, что теперь конь может попасть из любой клетки в любую другую. Клетка А "соединяет" клетки, отмеченные розовым цветом, т.е. через неё можно из множества 1 перескочить в множество 4. (Находясь в любой клетке с номером 1, можно прийти в розовую клетку с номером 1, затем через А попасть в розовую клетку с номером 4, и из неё — в любую клетку с номером 4. В итоге из любой клетки с номером 1 можно с помощью А попасть в любую клетку с номером 4.)

Клетка В соединяет клетки, отмеченные зелёным, т.е. через неё можно из любого из множеств 2, 3, 4 перескочить так же в любое из этих множеств.

В итоге, сочетая клетки А,В, можно из любого множества попасть в любое другое. Например чтобы попасть из множества 1 в множество 2, вначале с помощью А попадаем из 1 в 4, затем с помощью В попадаем из 4 в 2.

A		B										
2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...		
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...		

Рис.2

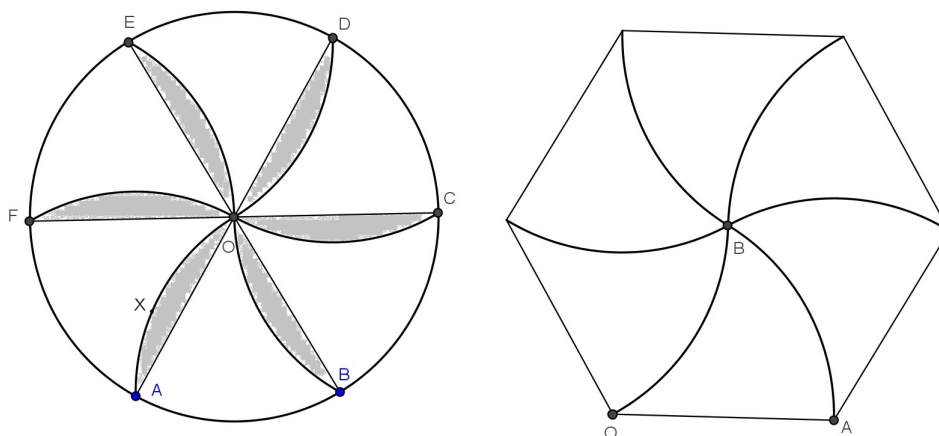
Осталось убедиться, что одной клетки не хватит. Из рисунка 3 видно, что все добавляемые клетки разбиваются на два вида: в клетки А можно попасть не больше чем из 3 клеток доски, в клетки В можно попасть из 4-х клеток, но среди них всегда есть две из одного множества (отмеченные одинаковой цифрой). Т.е. клетки, в которую можно попасть из всех 4-х множеств, не существует.

	A	A	B	B	B	B	A	A	
A	2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...	1	4	A	
A	1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...	2	3	A	
	A	A	B	B	B	B	A	A	

Рис. 3

4. **Ответ:** Можно.

Решение. См. рисунок. Здесь точки A, B, C, D, E, F делят окружность на 6 равных дуг. Поскольку $BA = BO = r$, можно построить дугу AXO с центром в точке B и концами в точках A, O . Остальные дуги с концами в точке O строятся аналогично. Эти дуги равны дугам, на которые окружность делится точками A, B, C, D, E, F . Удалим теперь затемнённые части, и повернём криволинейный треугольник AOB на 120° вокруг центра треугольника AOB , так, чтобы его вершина B перешла в центр круга. Аналогично повернём остальные криволинейные треугольники. В результате получим правильный шестиугольник на рисунке справа.



5. **Решение.** а) Например $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Чётность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x) + f(10-x) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi(10-x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

т.к. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

б) Из чётности получаем $f(10 - x) = f(x - 10)$, т.е.

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при любом x . Подставив сюда $x + 10$ и $x + 20$ вместо x , получим

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$

$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x + 20) - f(x) = 0$ при любом x , т.е. функция периодична с периодом 20.

6. **Ответ:** $x = 8, y = 14, z = 18$.

Решение:

Мы будем использовать следующее утверждение: *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m , то и третье делится на m .*

Доказательство. Пусть например x и y делятся на m .

$$\begin{cases} x:m \Rightarrow a:m, b:m \\ y:m \Rightarrow b:m, c:m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a:m \\ c:m \end{cases} \Rightarrow z:m.$$

□

Следствие: *если одно из чисел x, y, z не делится на m , то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m .*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

$$6, 8, 12, 18, 24$$

$$14, 20, 28, 44, 56$$

$$5, 15, 18, 27, 42$$

Заметим, что в первых двух строках все числа чётные, т.е. $x:2, y:2 \Rightarrow z:2 \Rightarrow z = 18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z:3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not:3 \Rightarrow x \not:3 \Rightarrow x = 8$. Далее, $x:4, z \not:4 \Rightarrow y \not:4 \Rightarrow y = 14$. Наконец $y:7, x \not:7 \Rightarrow z \not:7 \Rightarrow z = 18$.

Значения $x = 8, y = 14, z = 18$ возможны, например, при $a = 72, b = 56, c = 126$.

7. **Ответ:**

а) $f(9) > f(10)$,

б) $f(6) > f(5)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n .

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы.

Пример:

$$t = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \\ \hline \end{array} \quad g(t) = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \\ \hline \end{array}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g : S_{10} \rightarrow S_9$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_9 . Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. Пусть дана таблица $y \in S_9$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{10}$ такой, что $g(x) = y$.

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_9 \end{array} \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & b_9 & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа a_1, \dots, a_9, c , а последняя строка содержит неизвестные числа b_1, \dots, b_9, c .

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y . Но в любой строке таблицы y стоят 9 различных чисел из множества $\{1, 2, \dots, 10\}$, т.е. для a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа a_1, \dots, a_9 однозначно определяются по таблице y . Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j .

Если среди восстановленных чисел a_1, \dots, a_9 есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x , удовлетворяющей равенству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. \square

Следствие: если $x_1, x_2 \in S_{10}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. Существует таблица $y \in S_9$ такая, что $\forall x \in S_{10} : g(x) \neq y$.

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_9$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \dots, 9$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 9 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \hline \end{array}$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 10$, что противоречит условию. Следовательно искомым таблицы x не существует. \square

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_9 больше элементов, чем в S_{10} , т.е. $f(9) > f(10)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы x_1, \dots, x_K из множества S_{10} . Рассмотрим следующую диаграмму отображения g :

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \dots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{10} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y . Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_9 , и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_9 больше, чем в S_{10} .

б) Докажем, что при отображении $g : S_6 \rightarrow S_5$ в каждую таблицу множества S_5 отображается более одной таблицы множества S_6 . Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. Пусть дана таблица $y \in S_5$. Тогда существует не менее 4 различных таблиц $x \in S_6$ таких, что $g(x) = y$.

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & a_1 \\ & & & & & a_2 \\ & & & & & a_3 \\ & & & & & a_4 \\ & & & & & a_5 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & c \\ \hline \end{array} y$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_5$ построить не менее 4 различных таблиц x , удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 9 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \dots, 10\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y . Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \dots, 5$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i -й строке таблицы y , а также не равнялось уже выбранным числам a_1, \dots, a_{i-1} . Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $5 + 4 = 9$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \dots, 5$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j -м столбце таблицы y , а также не равнялось числам b_1, \dots, b_{j-1} .

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел a_i, b_j , $i, j = 1 \dots 5$, не более 9 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x . Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_6 , при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 6 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 4 способов выбрать число a_2 , и все они привели бы к различным таблицам x . Следовательно таких таблиц x , для которых $g(x) = y$, не менее 4, что и требовалось доказать. \square