

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**Литература и методические указания  
для подготовки к Межрегиональной  
олимпиаде школьников «Высшая проба»  
по математике для учащихся 7-11 классов**

**Москва 2019**

## **Об олимпиаде**

Олимпиада “Высшая проба” проводится в два тура. Первый интернет-тур состоит из десяти задач, в каждой из которых требуется получить числовой ответ. Участники, показавшие лучшие результаты на первом туре, приглашаются на второй, очный тур, который проходит приблизительно на 40 площадках по всей России, а также в других странах. Задание очного тура состоит из шести задач в 7-8 классах и семи задач в 9-11 классах. В задачах требуется не только получить ответ, но и изложить на математическом уровне строгости решение, приведшее к этому ответу. В ходе работы не допускается использование литературы, записей, электронных устройств.

В 9-11 классах для каждой задачи второго тура указано число баллов, которым оценивается верное решение. Оценка за работу складывается из оценок за те три задачи, которые принесли участнику наибольшее число баллов. В 7-8 классах каждая задача оценивается в 20 баллов, а оценка за работу складывается из оценок за все задачи (либо приравнивается к 100 баллам, если сумма превысила это значение).

## **О подготовке к олимпиаде**

Для решения заданий олимпиады достаточно свободного владения школьной программой. Однако задачи, предлагаемые на олимпиаде, требуют от школьника не только знания программы и сообразительности, но и умения и готовности думать, рассуждать, не только вычислять, но и анализировать результаты вычислений, высказывать гипотезы, проверять их и доказывать, а также записывать результаты своих исследований на математическом уровне строгости. Это особенность не только нашей олимпиады – такие же задачи предлагаются в нашей стране на математических олимпиадах уже более 60 лет.

За это время выпущено множество сборников олимпиадных задач, по которым школьник может познакомиться с задачами такого стиля и попробовать свои силы в их решении. Некоторые из таких сборников и интернет-ресурсов перечислены ниже. Кроме того, олимпиадные задачи традиционно обсуждаются на математических кружках и сезонных школах, а материалы занятий этих кружков публикуются. Такие материалы тоже могут оказаться полезными, и мы также приводим некоторый (далеко не полный) перечень подобных книг. Следует, однако, иметь в виду, что в таких “кружковых” книжках могут иногда на доступном школьнику уровне разбираться весьма сложные задачи и весьма глубокие математические результаты. Владение подобным материалом не является необходимым для решения олимпиадных задач.

## **О перечне тем олимпиады**

Перечень тем (опубликован на официальном сайте) остается практически неизменным с первых лет олимпиады и охватывает классическую школьную программу по математике.

Тем не менее, понятие “классическая школьная программа” не кодифицировано, а его границы никак не определяются внутренней логикой математической науки, и потому не являются четкими. На этих границах есть важные темы, которые, хотя и не повсеместно изучаются на школьных уроках в деталях, но фактически знакомы большинству старшеклассников, и не зря: знание этих сюжетов важно для продуктивного участия в сезонных математических школах и успешного начала обучения на математических специальностях ведущих ВУЗов. Более подробно об этих темах и посвященной им учебной литературе можно узнать на странице [math.hse.ru/podgotovka](http://math.hse.ru/podgotovka).

Мы будем постепенно включать эти сюжеты в перечень тем олимпиады для 11 класса. Такие “пограничные” темы будут затрагиваться всего лишь парой задач варианта, а значит,

правила оценивания финального тура (см. выше) позволят участнику получить первую премию, даже вовсе не приступая к этим задачам.

Таким образом, эти темы и задачи не являются обязательными для победы. Мы включаем их в олимпиаду в первую очередь для того, чтобы привлечь к ним внимание старшеклассников, поскольку верим, что их своевременное изучение может улучшить Вашу дальнейшую образовательную траекторию.

В частности, в 2019-20 учебном году мы в несколько большем объеме, чем раньше, включили в перечень тем для 11 класса элементы языка теории **множеств**, а также первые сведения о **комплексных числах**. Некоторые источники по этим темам предложены ниже.

Для удобства читателя мы приводим здесь краткий обзор перечня тем олимпиады:

- **ЯЗЫК ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ**
  - Понятие логических операций И, ИЛИ, НЕ. Импликация, равносильность, доказательство от противного.
  - Понятие множества и отображения множеств, операции с множествами: пересечение, объединение, разность. Обратное отображение и композиция отображений.
- **СИМВОЛЬНАЯ АЛГЕБРА**
  - Навыки решения уравнений, неравенств и их систем. Множество решений системы уравнений или неравенств. Равносильные преобразования уравнений и неравенств. Уравнения и неравенства с параметрами. Средние и неравенства для средних.
  - Сведение текстовых задач к уравнениям и неравенствам. Основные единицы измерения: размерные и безразмерные (проценты).
  - Формулы сокращенного умножения. Суммирование прогрессий. Обозначения  $\Sigma$  и  $\Pi$ .
  - Теорема Виета, симметрические функции от корней многочлена.
- **ЧИСЛА И ДЕЛИМОСТЬ**
  - Целые, рациональные, иррациональные, действительные (вещественные) и комплексные числа: определения и операции с ними.
  - Различные представления чисел: десятичная (и другие) система счисления, представление рационального числа в виде несократимой дроби и в виде бесконечной периодической десятичной дроби, алгебраическое и тригонометрическое представление комплексного числа.
  - Деление целых чисел с остатком, признаки делимости, единственность разложения натурального числа на простые множители, НОД и НОК.
  - Навыки решения уравнений в целых числах.
  - Деление многочленов с остатком, теорема Безу.
- **ГЕОМЕТРИЯ**
  - Аксиомы Евклидовой геометрии.
  - Основные понятия планиметрии и стереометрии: равенство и подобие фигур, параллельность и скрещенность прямых и плоскостей, окружность и сфера, треугольники и их замечательные точки, многоугольники и многогранники (включая их основные специальные типы), расстояние, угол, площадь и объем, касание, вписанность, описанность -- вместе с базовыми фактами о них.

- Понятие построений циркулем и линейкой, геометрическое место точек.
- Осевая и центральная симметрия, параллельный перенос.
- **ФУНКЦИИ, КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ**
  - Понятие декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Задание элементарных геометрических фигур уравнениями в координатах. Координаты точек пересечения таких фигур. Вычисление расстояний, углов и площадей, проверка параллельности и касания в терминах координат.
  - Геометрическая интерпретация систем уравнений и неравенств двух и трех переменных.
  - Векторы, их сумма и скалярное произведение, их представление в координатах.
- **ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНЫЕ**
  - Понятие числовых функций, обратных к ним и их композиций, суммы и произведения функций. Область определения и область значений. График функции одной переменной.
  - Понятие монотонности, локального минимума/максимума, метод интервалов.
  - Знакомство с основными элементарными функциями: степень, корень, модуль, экспонента, логарифм, тригонометрические функции и обратные к ним. Тригонометрические тождества.
  - Производная функции, ее физический и геометрический смысл, вычисление производных элементарных функций, исследование функций на монотонность и экстремумы с помощью производных, касание графиков функций.
- **КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ**
  - Основы перечислительной комбинаторики: число сочетаний и перестановок, биномиальные коэффициенты, треугольник Паскаля, бином Ньютона. Формула включений-исключений.
  - Рекуррентные соотношения второго порядка, числа Фибоначчи.
  - Понятие вероятности и условной вероятности, элементарного события, случайной величины с конечным числом значений, ее математического ожидания, медианы, дисперсии, независимости случайных величин.
  - Геометрическая вероятность.

Что в точности подразумевается в каждом из этих пунктов, и что начиная с какого класса требуется знать -- можно увидеть в полном перечне тем на сайте.

## **Об источниках для подготовки**

### **Интернет-ресурсы**

Библиотека свободно распространяемой математической литературы МЦНМО:

<http://ilib.mccme.ru/> и <https://www.mccme.ru/free-books/>

База задач <http://www.problems.ru/>

### **Основная литература**

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки, Киров, 1994

2. Алфутова Н. Б. Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, М., МЦНМО, 2006
4. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии, М., МЦНМО, 2010
5. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу, М., МЦНМО, 2007
6. Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика, М. МЦНМО, 2010
7. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия, М. МЦНМО, 2008
8. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы, М. МЦНМО, 2011
9. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии, 2005
10. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Яценко И.В., Московские математические олимпиады 1993-2005, М. МЦНМО, 2008
11. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007.
12. Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Яценко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010
13. М. Вялый, В. Подольский, А. Рубцов, Д. Шварц, А. Шень "Лекции по дискретной математике"
14. Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.
15. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи, 2011

#### Дополнительная литература

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы, М. МЦНМО, 2010
2. Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы, М. МЦНМО, 2007
3. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. Челябинск, 2005.
4. Жижилкин И.Д. Инверсия, 2009
5. Заславский А.А. Геометрические преобразования, 2004
6. Сергеев И.Н. Зарубежные математические олимпиады. М. Наука, 1987
7. Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач, 2008
8. Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов, 2010
9. Шаповалов А.В. Принцип узких мест, 2008
10. Шень А., Игры и стратегии с точки зрения математики, 2008

#### Литература по элементам теории множеств и комплексным числам

11. Н.Я. Виленкин. Рассказы о множествах, 4-е изд., М., МЦНМО, 2007
12. Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М: МЦНМО, 2012
13. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? М., МЦНМО, 2013
14. В.И. Арнольд. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов, М., МЦНМО, 2002
15. Я.П.Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах, М., МЦНМО, 2004