Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига» – 2020 г.

Направление: «Теория игр»

Профиль: «Теория игр» **КОД - 390**

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи. Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

1. (10 баллов) «Стоит ли смешивать компании?»

Пусть у каждой женщины и у каждого мужчины заданы строгие предпочтения на множестве партнеров противоположного пола. Дан граф знакомств. Знакомые мужчины и женщины разбиваются на пары так, что итоговое разбиение устойчиво, то есть в нем нет таких знакомых мужчины и женщины, которые сейчас не в паре, но предпочитают друг друга своим текущим партнерам или же одиноки.

Предположим, что совпадают предпочтения как всех мужчин, так и всех женщин. Перед тем как все разобьются на пары, Алиса думает познакомить ли ей своих знакомых – Бориса и Вику. Бывает ли так, что

(a) (5 баллов) Алиса окажется с менее предпочтительным мужчиной, познакомив Б и В?

(b) (5 баллов) Алисе выгодно познакомить Б и В?

(10 points) “Should one combine the parties?”

Let every woman and every man have strict preferences on a set of partners of the opposite sex. An acquaintance graph is given. Men and women who know each other form pairs and the final partition is stable: no unmatched man and woman knowing each other prefer being together to their current partners or are lonely.

Suppose that the preferences of both all men and all women coincide. Before the matching starts, Alice is thinking to introduce her friends Boris and Victoria to each other. Is it possible that

(a) (5 points) the situation becomes worse for Alice if she introduces B and V to each other?

(b) (5 points) it is profitable for Alice to introduce B and V to each other?

2. (X+Y баллов) «Вдали от обезумевшей толпы»

(a) **(X баллов)** Напишите целое число X от 1 до 10. Те, кто написал самое редкое число (среди всех других участников олимпиады по профилю «Теория игр» этого года), получают указанное ими количество баллов.

(b) **(Y баллов)** Задача та же – написать число Y, но на этот раз выигрывают те, кто угадал второе по частоте число.

(X+Y points) "Far from the mad crowd"

(a) **(X points)** Write an integer number X from 1 to 10. Those who wrote the most rarely number (among the works of all other participants of the Game Theory Olympiad of this year) will receive the X number of points.

(b) **(Y points)** The task is the similar, i.e. to write an integer number Y from 1 to 10, but now the winners are those whose number is the second popular among others.

3. (25 баллов) «Судью на мыло!»

Перед началом матча Зенит-Спартак выяснилось, что на стадионе не хватает штанг у ворот. Судья всё же решил проводить матч по таким правилам: он произвольно (независимо с равномерным распределением) выбирает две точки X<Y на отрезке [0,40], и разрешает Зениту установить в эти точки штанги ворот: обычную и невидимую. Зенит решает, в какую из точек поставить каждую штангу. Спартак видит, что видимую штангу установили в точку Z, но не знает левая это штанга (Z=X) или правая (Z=Y).

(a) **(10 баллов)** Предположим, Зенит выбрал точку случайным образом, X или Y с вероятностью 1/2. На последней минуте матча Спартак готов нанести свой первый удар по "воротам" Зенита, "ворота" пустые. Куда следует бить, чтобы максимизировать вероятность гола?

(b) **(15 баллов)** Решите игру. В какую точку – X или Y – должен был установить видимую штангу Зенит, чтобы минимизировать вероятность гола при оптимальной игре Спартака?

(25 points) "The ref needs specs!"

Before the match between Zenit and Spartak starts, it was found out that the stadium did not have enough goalposts at the gate. Nevertheless, the referee decided to play the match according to the following rules: he arbitrarily (independently with a uniform distribution) selects two points X<Y on the interval [0.40], and allows Zenit to set the goalposts at these points, one is normal and one is invisible. Zenit decides at which point to put each goalpost. Spartak sees that the visible goalpost has been set to point Z, but does not know if it is the left one (Z = X) or the right one (Z = Y).

(a) **(10 points)** Assume that Zenit chose the point randomly, i.e. X or Y with equal probabilities 1/2. In the last minute of the match, Spartak is ready to strike his first shot at the "goal" of Zenit, the "goal" is empty. Where to beat to maximize the probability of a goal?

(b) **(15 points)** Solve the game. At what point, X or Y, should Zenit put the visible goalpost in order to minimize the probability of a goal under the optimal Spartak behavior?

4. (15 баллов) «Покупай!»

У продавца есть два товара: пылесос и утюг. Ценность каждого из этих товаров для покупателя, V_1 и V_2, соответственно, а обоих вместе – V_1+V_2. Продавец не знает точно ценности покупателя, но считает, что они равномерно распределены на [0,1000], независимо друг от друга. Полезность покупателя равна ценности приобретенных товаров за вычетом цен.

- **(a) (5 баллов)** Продавец выбирает из двух стратегий продаж. Продавец может назначить цену для каждого из товаров по отдельности, и в этом случае покупатель купит те товары, ценность которых для него будет выше цены. Или же, продавец может продавать товары только вместе, единым пакетом. В этом случае покупатель купит оба товара, если сумма ценностей превысит цену пары. Какие оптимальные цены предложит продавец в каждом случае, и какой ожидаемый доход получит? Какая схема продажи для него оптимальнее, по отдельности или вместе?
- **(b) (10 баллов)** Предположим теперь, что продавец может предложить меню из трех возможностей: купить каждый товар по отдельности за свою цену или пакетом. Какие цены предложит продавец, и какой будет его ожидаемый доход?

(15 points) "Buy it!"

A seller has two goods for sale: a vacuum cleaner and an iron. A buyer has a value $V_1$and $V_2$for each good separately, and so a value of V_1+V_2 for both. The seller does not know the buyer's value exactly, he thinks that the values are uniformly distributed on [0,1000], independently from each other. The buyer's utility equals the values of the goods he buys minus their prices.

- **(a) (5 points)** The seller chooses between two mechanisms of sales. The seller can set prices for each good separately, in which case the buyer would buy only the goods with value exceeding the price. Or, the seller can sell the goods only as a bundle. In this case the buyer would purchase both goods when the sum of their values exceeds the price of the bundle. What are the seller's optimal prices and expected revenues in each case? Which scheme would the seller prefer, selling the goods individually or as a bundle?
- **(b) (10 points)** Suppose now that the seller can offer a menu of three options: buying each good separately or both goods as a bundle. Which prices should the seller offer? How much expected revenue he would be able to obtain?

5. (18 баллов) «Проблема этикета»

Альбус Дамблдор (игрок 1), Северус Снегг (игрок 2) и Гарри Поттер (игрок 3) сидят за столом на торжественном ужине. Им приносят блюдо из рыбы и экзотическую вилку, с помощью которой эту рыбу следует есть. Проблема в том, что все трое не помнят, в какой руке надо держать вилку; изначально известно, возможно два состояния мира: $w=R$ (то есть вилку надо держать в правой руке) и $w=L$ (то есть вилку надо держать в левой руке). При этом априорная вероятность того, что $w=R$, равна $p\geq 1/2$. Вдобавок, каждый игрок $i=1,2,3$ обладает частной информацией $s_i\in\{L,R\}$, которая верна с вероятностью $q>1/2$, причем

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

То есть если вилку действительно надо держать в правой руке, то $s_i=R$ с вероятностью q и $s_i=L$ с вероятностью $1-q$. При заданном w случайные величины s_i статистически независимы.

- **(a) (3 балла)** Пусть игроки берут в руки вилки в такой очередности: сначала Дамблдор выбирает $a_1\in\{L,R\}$, потом Снегг выбирает a_2, потом Поттер выбирает a_3. Каждый игрок хочет одного: не ошибиться, какой рукой взять вилку – в таком случае он получает выигрыш, равный 1 (и выигрыш, равный 0 в противоположном случае). Найдите, как выбор Снегга будет зависеть от s_2 и a_1.
- **(b) (5 баллов)** Найдите, как выбор Поттера будет зависеть от a_1, a_2 и s_3.

- **(c) (10 баллов)** Пусть за столом сидит N человек. При каких условиях происходит *информационный каскад*: если $s_1=R$, то в равновесии $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$, вне зависимости от сигналов $s_2,\ldots,s_N$?

(18 points) “Etiquette problem”

Albus Dumbledore (Player 1), Severus Snape (Player 2) and Harry Potter (Player 3) are seated at a gala dinner table. They are brought a fish dish and an exotic fork, with which this fish should be eaten. The problem is that all three do not remember which hand to hold the fork; initially it is known that there are two possible states of the world: $w=R$ (that is, the fork must be held in the right hand) and $w=L$ (that is, the fork must be held in the left hand). Moreover, the a priori probability that $w=R$ is $p\geq 1/2$.

In addition, each player $i=1,2,3$ has private information $s_i\in\{L,R\}$, which is true with probability $q>1/2$, and

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

This means that, if the fork really needs to be held in the right hand, then $s_i=R$ with probability q and $s_i=L$ with probability 1-q. For a given w, random variables s_i are statistically independent.

- **(a) (3 points)** Let the players take the forks in this order: first, Dumbledore chooses $a_1\in\{L,R\}$, then Snape chooses a_2, then Potter chooses a_3. Each player wants not to be mistaken with which hand to take the fork, in this case he receives a win equal to 1 (and a win equal to 0 in the opposite case). Find how Snape's choice will depend on s_2 and a_1.
- **(b) (5 points)** Find how Potter’s choice will depend on a_1, a_2 and s_3.
- **(c) (10 points)** Let N people sit at the table. Under which conditions does an *information cascade* occur: if $s_1=R$ then, in equilibrium, $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$ regardless of signals $s_2,\ldots,s_N$?

6. (22 балла) «Хитрые уступки»

Ася и Боря собираются играть в следующую игру. Фишка стоит в корне бинарного дерева глубины n, все ребра которого ориентированы от корня к листьям. В каждом листе случайно и независимо написана буква «А» с вероятностью p или «Б» с вероятностью 1–p. Ребята по очереди совершают ходы, перемещая фишку вдоль ребра из вершины в соседнюю с ней. Через n ходов фишка достигает листа. Если на нем буква «А», то выигрывает Ася, если «Б», то Боря.

Боря – настоящий джентльмен. Он предлагает отдать Асе первый ход и даже вероятность сделать в Асину пользу: p =4/7.

- **(a) (10 баллов)** В предположении, что n=2k велико, посоветуйте Асе, стоит ли ей соглашаться на такие щедрые уступки? Ответ обоснуйте.
- **(b) (10 баллов + 2 балла)** Найдите такое p, что даже при большом n=2k у обоих ребят шанс выиграть хотя бы 10%. Бонус **(+2 балла)** тем, кто напишет чем еще примечательно это число.

(22 points) “Tricky concessions”

Asya and Boris are going to play the following game. The chip is at the root of a binary tree of depth n, all edges of which are oriented from the root to the leaves. The letter “A” with probability p or “B” with probability 1 – p is randomly and independently written on each leaf. The players take turns moving the chip along the edge from the vertex to the neighboring one. After n moves, the chip reaches the leaf. If the letter “A” is on it, then Asya wins, if “B”, then Boris.

Boris is a real gentleman. He offers to give Asa the first move and even the to make the probability in favor of Asya: $p = 4/7$.

- **(a) (10 points)** Under the assumption that $n=2k$ is large, advise Asya whether she should agree to such generous concessions? Explain the answer.
- **(b) (10 points + 2 points)** Find a p such that even for large $n = 2k$, both players have at least 10% chances to win. We will give a bonus **(+2 points)** to those who write what else is remarkable with this number p.