

Направление: «Математика»

КОД 010/011

Профили:

«Математика» / «Mathematics»

«Математическая физика» / «Mathematical physics»

Время выполнения задания — **240 минут**

1. Правила олимпиады не позволяют участникам иметь на рабочем месте ничего, кроме бланка работы, а также ручки, воды, шоколада и их аналогов. В том числе, на рабочем месте не допускаются письменные или печатные материалы и электронные устройства, а также обращение к другим участникам олимпиады.
2. Каждая из задач оценивается из 20 баллов. Если сумма набранных баллов превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам. Задание состоит из общей части (четыре задачи) и двух специальных частей “математика” и “математическая физика”, по две задачи каждая. Участник олимпиады, помимо задач общей части, выбирает одну (и только одну) из двух специальных частей по своему усмотрению.
3. Если Вы рассматриваете возможность использовать результаты олимпиады для поступления вне конкурса на магистерские программы НИУ ВШЭ (“Математика и математическая физика”, “Mathematics”, Совместная магистратура НИУ ВШЭ и Центра Педагогического Мастерства), то Вам также важно ознакомиться со следующей информацией.

ВЫБОР ЯЗЫКА. Если Вы планируете выбрать любую из двух специализаций (“математика” или “математическая физика”) англоязычной программы “Mathematics”, то решения **всех** задач следует записывать по-английски. Выбирающим любую из двух специализаций (“математика” или “математическая физика”) русскоязычной программы “Математика и математическая физика”, а также поступающим в Совместную магистратуру ВШЭ–ЦПМ, можно все решения писать по-русски.

ВЫБОР СПЕЦИАЛИЗАЦИИ. Выбор специальной части олимпиады (“математика” или “математическая физика”), а также языка программы (русскоязычная программа “Математика и математическая физика” или англоязычная “Mathematics”), **не ограничивает** последующий выбор специализации в магистратуре: например, можно решать спецчасть “Mathematics”, но в магистратуре (в случае успешного поступления) выбрать специализацию “Математическая физика”, и наоборот. Также не зависит от выбора специальной части олимпиады возможность поступления в Совместную магистратуру ВШЭ–ЦПМ.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART

1. Верно ли, что у ограниченного трехмерного тела все оси симметрии пересекаются в одной точке?

Is it true that all axes of symmetry of a bounded three-dimensional body intersect at one point?

2. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}).$$

Evaluate the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}).$$

3. Можно ли при некотором $n \in \mathbb{N}$ представить многочлен $(x-1)(x-2)\cdots(x-n) - 1$ в виде произведения двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами?

Can the polynomial $(x-1)(x-2)\cdots(x-n) - 1$ be factored into polynomials of smaller degrees with integer coefficients for some $n \in \mathbb{N}$?

4. Дана комплексная $n \times n$ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Верно ли, что $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ существует и равен проектору на одномерное подпространство? Если предел существует, найдите его ядро и образ.

Consider a complex $n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Is it true that $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ exists and equals to a projection operator onto a one-dimensional subspace? If the limit exists, find its kernel and image.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

M: «Математика» / «Mathematics»

M1. Функция f аналитична на всей комплексной плоскости и переводит любую неограниченную последовательность в неограниченную. Верно ли, что f — полином?

A function f is analytic in the entire complex plane, and f maps every unbounded sequence to an unbounded sequence. Is f polynomial?

М2. Даны две комплексные $n \times n$ матрицы P и Q такие, что $P^2 = P$ и $Q^2 = Q$. Может ли ранг $1 - P - Q$ превосходить $n - |\text{rk } P - \text{rk } Q|$?

Suppose that P and Q are complex $n \times n$ matrices such that $P^2 = P$ and $Q^2 = Q$. Is it possible that the rank of $1 - P - Q$ is greater than $n - |\text{rk } P - \text{rk } Q|$?

Ф: «Математическая физика» / «Mathematical physics»

Ф1. Материальная точка совершает колебания в однородном поле тяжести, двигаясь без трения вдоль некоторой плоской кривой $y(x)$ в окрестности ее локального минимума в точке $x = 0$ (в плоскости движения введены декартовы координаты xOy). Определите уравнение кривой, если известно, что период колебаний точки не зависит от их амплитуды. Поле тяжести направлено против оси Oy .

A massive particle oscillates in a uniform gravitational field moving without friction along a flat curve $y(x)$ in a vicinity of its local minimum at $x = 0$ (the Cartesian coordinates xOy are introduced in the plane of movement). Find the equation of the curve, provided that the oscillation period is independent of the oscillation amplitude. The gravitational field is directed against the Oy axis.

Ф2. Вдоль тонкого кольца радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q_1 . На оси симметрии кольца, перпендикулярной его плоскости, находится тонкая палочка длины 2ℓ . Вдоль палочки также равномерно распределен электрический заряд Q_2 . Расстояние между центром кольца и серединой палочки равно H . Определите:

1. Энергию электростатического взаимодействия кольца и палочки.
2. Модуль и направление вектора силы электростатического взаимодействия, действующей на палочку.

An electric charge Q_1 is uniformly distributed along a thin circle of radius R . A thin rod of length 2ℓ is placed along the circle symmetry axis perpendicular to the circle plane. An electric charge Q_2 is uniformly distributed along the rod. The distance between the circle center and the middle point of the rod is equal to H .

1. Find the energy of the electrostatic interaction of the rod and the circle.
2. Find the electrostatic force vector (absolute value and direction) acting on the rod.