Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Solution of each problem costs 10 points, the maximum sum equals to 100 points.

1. Найти $\det(e^A)$ - определитель матричной экспоненты для матрицы

1. Calculate $\det(e^A)$, the determinant of exponential matrix, for the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -48 \\ 8 & -21 \end{pmatrix}$$

Решение.

Диагонализируем матрицу A. Для этого найдем ее собственные значения и собственные вектора. Характеристический многочлен матрицы A равен $p_A(x) = x^2 + 2x - 15$. Соответственно, собственные значения равны $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -5$. Соответствующие собственные вектора $v_1 = (3, 1), v_2 = (2, 1)$. Получаем, $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Хорошо известно, что $e^A = Pe^D P^{-1}$. Получаем

$$e^A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^3 - 2e^{-5} & -6e^3 + 6e^{-5} \\ e^3 - e^{-5} & -2e^3 + 3e^{-5} \end{pmatrix}$$

Вычисляя определитель получившейся матрицы, находим $\det(e^A) = e^{-2}$.

Однако, задачу можно решить и более простым способом. Воспользуемся равенством $\det(e^A) = e^{tr(A)}$, где $tr(A)$ — след матрицы (т.е. сумма ее диагональных элементов). Для данной матрицы A ее след равен $tr(A) = -2$. Соответственно,$\det(e^A) = e^{-2}$.

Критерии.

10 баллов: Полностью обоснованной решение с правильным ответом.
8-9 баллов: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании.
6-7 баллов: Правильно найдены матрицы P, D но допущена ошибка либо при их перемножении, либо при вычислении определителя.
4-5 баллов: Допущена ошибка при вычислении матриц P, D.
1-3 баллов: Различные попытки решения. Высказана идея о необходимость диагонализации матрицы.

2. Найдите функцию $y = y(x)$ такую, что

2. Calculate the function $y = y(x)$ given that

$$\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 xy(x)dx, \quad y(0) = 1.$$

Решение.

Дифференцируя исходное уравнение, получаем:

$$y'' = y'.$$

Общее решение данного линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 e^x.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 xy(x)dx = \int_0^1 x(C_1 + C_2 e^x)dx = \frac{C_1}{2} + C_2.$$

Подставляя $y(x)$ в исходное уравнение, получаем:

$$C_2 e^x = C_1 + C_2 e^x + \frac{C_1}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}C_1 + C_2 = 0.$$

Из условия $y(0) = 1$, следует, что

$$C_1 + C_2 = 1.$$

Решение системы уравнений

$$C_1 + C_2 = 1, \quad \frac{3}{2}C_1 + C_2 = 0,$$

имеет вид:

$$C_1 = -2, \quad C_2 = 3.$$

Ответ: $y = 3e^x - 2$.

Критерии:

- 10 баллов: Полностью обоснованной решение с правильным ответом.
- 8-9 баллов: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании. Например, если вид решения был угадан и решение было построено, но в работе нет доказательства отсутствия других решений.
- 4-7 баллов: Правильно выполнены основные действия, но получен неправильный ответ. Либо частичное отсутствие обоснование выполненных действий.
- 1-3 баллов: Различные попытки решения. Высказаны идеи, ведущие к решению.

3. Назовем турниром ориентированный граф $G = (V, E)$ такой, что $(x, x) \notin E$ для любой вершины $x \in V$, а для любых двух различных вершин $x \neq y$, $x, y \in V$ либо $(x, y) \in E$, либо $(y, x) \in E$.

Множество вершин назовем игроками, каждая пара игроков ровно один раз встречаются на матче, если игрок x выигрывает у игрока y, то $(x, y) \in E$. Гамильтоновым путем графа назовем перестановку вершин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что для всех i игрок x_i выигрывает у x_{i+1}. Покажите, что найдется такой турнир на n вершинах, для которого число гамильтоновых путей не меньше чем $n!/(2^{n-1})$.

3. Tournament is a directed graph $G = (V, E)$, such that $(x, x) \notin E$ for any vertex $x \in V$, and for every two vertices $x \neq y$, $x, y \in V$ either $(x, y) \in E$, or $(y, x) \in E$.

A set of vertices is called players, every player encounters every other player exactly once, if player x beats player y, then $(x, y) \in E$. Hamiltonian path is a permutation of vertices $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in such a way that for every i a player x_i beats x_{i+1}. Show that there is a tournament of n vertices that contains at least $n!/(2^{n-1})$ Hamiltonian paths.

Решение.

Турнир задается выбором ориентации ребер, которых $\binom{n}{2}$. Поэтому всего турниров $2^{\binom{n}{2}}$. Рассмотрим вероятностное пространство, элементами которого будут все турниры на n вершинах, причем для различных ребер их ориентации независимы. Это означает, что все турниры равновероятны.

Для каждой из $n!$ перестановок вершин (S) рассмотрим случайную величину v_S, равную единице, если вершины турнира образуют гамильтонов путь именно в этом порядке и 0 в противном случае.

Математическое ожидание v_S равно вероятности того, что она равна 1, т.е. $1/2^{n-1}$, как произведение вероятностей $n - 1$ независимых событий с вероятностью 1/2 каждое.

Число гамильтоновых путей в случайном турнире — тоже случайная величина, равная сумме v_S по всем возможным перестановкам S, поэтому его математическое ожидание в $n!$ раз больше, т.е. равно $n!/2^{n-1}$. С другой стороны, математическое ожидаение в данном случае — среднее значение числа гамильтоновых путей в турнире, поэтому существуют турниры, в которых не меньше гамильтоновых путей.

Критерии:

- 7-8 - решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным;
- 4-6 - либо решена половина задачи, либо недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях);
- 2-3 - задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению;

Типичные ошибки:

Как ни странно, не было приведено ни одного верного конструктивного доказательства и ни одного верного доказательства по индукции. Проверяющему также неизвестна подобная простая конструкция. Поэтому все такие решения оценены очнь низко — как правило 0, редко до 3 баллов.

- при доказательстве по индукции при шаге индукции конструкция, "размножающая"гамильтоновы пути работает только для конкретного пути, а не в общем случае.
- в доказательстве не используются никакие особенности турнира, т.е. утверждение доказывается для произвольного турнира. Что неверно, в линейно упорядоченном турнире гамильтонов путь только один.
- при комбинаторном подсчете числа путей некорректно используется правило произведения — почти всегда число способов продолжить путь на каждом шаге зависит от того, как выбиралось начало пути.

По "вероятностным"решениям.

- только идея решения в стиле "в среднем каждый гамильтонов путь встречается в одном из 2^{n-1} графов, а поскольку циклов $n!$, то...— 3 балла.
- не описано вероятностное пространство — 5 баллов,
- недостаточно аккуратно описано (чаще всего не объяснено, что ориентация разных ребер независима) — 7 баллов.

4. Верно ли, что в любом непланарном графе есть цикл длины 3 или 4?

4. Is it true that any non-planar graph has cycles of length 3 or 4?

Решение.

Нет. Рассмотрим полный граф на 5 вершинах и разобьем каждое ребро вершиной степени 2. По теореме Понтрягина–Куратовского этот граф не планарен, но любой цикл полного графа имеет длину не менее 3, поэтому любой цикл "разбитого"графа имеет длину не менее 6.

Критерии:

- Решение, преполагающее, что графы K_5 или $K_{3,3}$ должны быть подграфами непланарного графа с неверным ответом. До 2 баллов.
- Неверный пример — 0 баллов.
- Верный (но неочевидный) пример без доказательсва планарности и/или отсутсвия циклов длины 3 и 4 — 2 балла.
- Верный пример с попытками доказательства планарности через попытки рассмотреть все случаи расположения ребер на плоскости — до 5 баллов.
- Верный пример, с доказательством планарности но без доказательства отсутствия циклов малой длины — 7 баллов.
- Пример, аналогичный приведенному в решении без достаточных объяснений — 5-7 баллов.

5. На плоскости проведено 30 прямых общего положения (это означает, что никакие 2 не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке). Все точки пересечения покрашены в 2 цвета. Известно, что число одноцветных треугольников делится на 11. Докажите, что число разноцветных треугольников не делится на 11.

5. A plane contains 30 straight lines of general position (if no two of them are parallel, and no three of them meet in the same point). All the points of intersection are colored with two colors. It is known that the number of unicolorous triangles is divisible by 11. Prove that the number of multicolored triangles is not divisible by 11.

Решение.

Треугольник однозначно определяется тремя прямыми. Поэтому число треугольников равно

$$\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060.$$

Это число не делится на 11, так как числитель дроби не делится на 11. Поэтому число разноцветных треугольников равно разности между 4060 и числом одноцветных треугольников. Последнее делится на 11, поэтому число разноцветных треугольников равно $4060 - 11k$ и дает при делении на 11 тот же остаток, что и 4060, т.е. на 11 не делится.

Некоторые участники олимпиады решали задачу, предполагая, что треугольником можно считать любую тройку точек, и не важно, будут ли стороны этих треугольников частями выбранных 30 прямых. Хотя треугольник определяется, как "фигура, образованная тремя отрезками, которые соединяют три точки, не лежащие на одной прямой жюри сочло такую формулировку корректной. В этом случае 30 прямых пересекаются в $\binom{30}{2} = 435$ точках, поэтому троек точек будет $\binom{435}{3}$, но из них $30 \cdot \binom{29}{3}$ троек лежат на одной прямой, поэтому всего треугольников будет $\binom{435}{3} - 30 \cdot \binom{29}{3}$. Это число тоже не делится на 11, поэтому дальнейшие рассуждения аналогичны.

Критерии:

- Правильно подсчитанное общее число треугольников и общий неверный вывод (или отсутствие вывода) — 3-5 баллов.
- Неправильно подсчитанное общее число треугольников при верном дальнейшем рассуждении — 3 балла.
- В частности, большинство участников, выбравших второе прочтение условия, получили $\binom{435}{3}$ треугольников, что неверно.

6. Назовём **правильными скобочными последовательностями** семейство строк, состоящих из символов `'('` и `')'`, определяемое следующими свойствами:

- пустая строка — правильная скобочная последовательность;
- правильная скобочная последовательность, взятая в скобки — правильная скобочная последовательность (то есть если S — правильная скобочная последовательность, то и (S) — правильная скобочная последовательность);

6. Let **correct bracket sequence** be a collection of strings, consisting of the symbols `'('` and `')'`, with given properties:

- an empty string is a correct bracket sequence;
- a correct bracket sequence in parentheses is a correct bracket sequence (meaning if S is a correct bracket sequence, then (S) is also a correct bracket sequence);
- concatenation of two correct bracket sequences is also a correct bracket sequence.

- конкатенация двух правильных скобочных последовательностей — тоже правильная скобочная последовательность.

1) Предложите алгоритм, который для заданной строки $s_1 \dots s_n$, состоящей из символов `'('` и `')'`, определяет, существует ли i, для которого $s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$ — правильная скобочная последовательность. Оцените время его работы и затраты дополнительной памяти.

1) For a given string $s_1 \dots s_n$, consisting of symbols `'('` и `')'`, propose an algorithm determining the existence of i for which $s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$ is a correct bracket sequence. Assess the amount of time and additional storage needed to execute it.

2) Оптимизируйте процедуру так, чтобы она работала за $O(n)$ операций.

2) Optimize the procedure so that it executes in $O(n)$ operations.

Решение.

Самый простой способ это сделать — в цикле по i проверить отдельно каждую из строк вида $s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$. Это можно сделать без затрат дополнительной памяти, работая с индексами по модулю n. Идея следующая: мы поддерживаем индекс `bracket_counter`, который равен 0 в начале и который мы увеличиваем на 1 каждый раз, когда встречаем открывающуюся скобку, и уменьшаем на 1, когда встречаем закрывающую. Если `bracket_counter` становится отрицательным, мы констатируем неудачу и переходим к следующему i; если `bracket_counter` в конце оказался равен нулю, то для рассматриваемого i строка $s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$ является правильной скобочной последовательностью. Данный алгоритм работает за $O(n^2)$ операций в худшем случае.

Теперь опишем алгоритм, который работает за $O(n)$. Положим `i = 0` и запустим цикл `while(i <= n)`. На каждой итерации будет рассматривать $s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_i$ и делать то же, что и в прошлом алгоритме: инициализировав `bracket_counter` нулём, идти по строке и увеличивать `bracket_counter` на 1, встречая открывающуюся скобку и уменьшать `bracket_counter`, встречая закрывающую. Если при рассмотрении s_j `bracket_counter` стал (впервые) отрицательным, это значит, что на отрезке $s_i \dots s_j$ не может начинаться никакая правильная скобочная последовательность. Следовательно, мы можем перейти сразу к `i = j + 1` (если $j+1 > n$, то можно сразу сказать, что требуемых i не существует). Если же при рассмотрении какого-либо `i` счётчик `bracket_counter` никогда не стал отрицательным, но в конце не равен нулю, то это значит, что в целом в нашей строке открывающихся скобок больше, чем закрывающихся, и искомых `i` не существует. Легко видеть, что описанный алгоритм работает за $O(n)$ операций.

Описанные алгоритмы требуют $O(1)$ дополнительной памяти.

Критерии:

- описан неверный алгоритм — **0** баллов за всю задачу вне зависимости от остального;
- бездоказательно заявляется, что искомое i существует, если число открывающихся скобок равно числу закрывающихся — **0** баллов за задачу;
- верно описан алгоритм проверки последовательности на правильность, но дальше ошибка — **3** балла;
- алгоритм верен, но не удовлетворяет ограничениям по числу операций — **4** балла;
- алгоритм верен и удовлетворяет ограничениям по числу операций — **4** балла;
- оценка числа операций — **1** балл;
- оценка объёма дополнительной памяти — **1** балл.

7. Предложите алгоритм, позволяющий выбрать из массива `A[1:n]` два максимальных элемента, используя не более $n +]\log n[$ сравнений (здесь $]\cdot[$ означает взятие верхней целой части, то есть наименьшего целого числа, большего или равного заданного).

7. Propose an algorithm for finding two maximal elements from the array `A[1:n]` in no more than $n +]\log n[$ comparison operations (there $]\cdot[$ is a ceiling function which outputs the least integer greater than or equal to the given one).

Решение.

Разобьём элементы на пары и сравним элементы в каждой из пар. Далее, победитель в каждой из пар, а также элемент, оставшийся без пары (если такой есть), переходят на следующий раунд — их мы снова сравниваем в парах и так далее. Таким способом мы найдём максимальный элемент, произведя не более n сравнений. Заметим теперь, что второй максимум мог проиграть только максимальному элементу, то есть он был среди тех $\log(n)$ элементов, которые сравнивались в парах с максимальным. Как мы уже видели, среди них мы можем найти максимальный за $\log(n)$ сравнений.

Критерии:

- описание верного алгоритма — **6** баллов;
- верное обоснование сложности — **4** балла;
- в целом верное, но содержащее неточности обоснование сложности — **2** балла;

8. Специалист по машинному обучению пытается решить некоторую задачу. Для этого он берёт случайную модель, которая определяется случайной величиной $q \backsim N(0, \sigma^2)$ с настоящей оценкой качества (с максимальным значением величины $\hat{q} \backsim q + N(0, \sigma^2)$). Он повторяет выбор модели сто раз и отбирает из них модель с наилучшей оценкой качества $\hat{q}_{max}$. Какое математическое ожидание настоящего качества q_{max} выбранной модели при условии, что её оценённое качество оказалось единично $\hat{q}_{max} = 1$?

Замечание: Рассмотрим величину $M = max_{i \in 100}(q_i + \xi_i)$, где ξ_i – случайный шум, распределенный по нормальному закону, $\xi_i \backsim N(0, \sigma^2)$. Найдите значение математического ожидания выбранного q_i при условии $M_i = 1$.

8. A machine learning specialist is solving a task. He evaluates the real quality of a random model $q \backsim N(0, \sigma^2)$ (getting maximal value of $\hat{q} \backsim q + N(0, \sigma^2)$). He repeats sampling 100 times and chooses a model with the best quality estimation $\hat{q}_{max}$. What is the expected value of the real quality rate q_{max} of the chosen model, given that $\hat{q}_{max} = 1$? normally distributed noise

Note: Consider the value $M = max_{i \in 100}(q_i + \xi_i)$, where ξ_i is normally distributed noise, $\xi_i \backsim N(0, \sigma^2)$. Calculate the expected value of the chosen q_i considering $M_i = 1$.

Решение.

В задаче рассматривается величина $M = max_{i \in 100}(q_i + \xi_i)$ и спрашивается значение математического ожидания выбранного q_i при условии $M_i = 1$:

$$E(q_{i_{max}} | M = 1)$$

Заметим, что q и ξ входят в задачу совершенно симметрично. Если мы поменяем все q и ξ местами, вероятность данной конкретно пары никак не поменяется. Поэтому

$$E(q_{i_{max}} | M = 1) = \frac{\int_{M=1} q_{i_{max}} \cdot p(\overline{q}, \overline{\xi})}{P(M = 1)} = \frac{\int_{M=1} q_{i_{max}} \cdot p(\overline{\xi}, \overline{q})}{P(M = 1)} = \frac{\int_{M=1} \xi_{i_{max}} \cdot p(\overline{q}, \overline{\xi})}{P(M = 1)} = E(\xi_{i_{max}} | M = 1).$$

Их сумма 1, значит каждый по 1/2.

Критерии:

- 10 баллов: Полностью обоснованной решение с правильным ответом.
- 8-9 баллов: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании.
- 4-7 баллов: Правильно выполнены основные действия, но получен неправильный ответ. Либо частичное отсутствие обоснование выполненных действий.
- 1-3 баллов: Различные попытки решения. Высказана идеи, ведущие к решению.

9. Поверхность некоторой шарообразной планеты состоит из океана и суши (множество мелких островков). Суша занимает больше половины площади планеты. Также известно, что суша есть множество, принадлежащее борелевской σ-алгебре на сфере.

На планету хочет совершить посадку космический корабль, сконструированный так, что концы всех 2020 его ножек могут лежать на поверхности планеты. Посадка окажется успешной, если не меньше 1011 ножек из 2020 окажутся на суше. Всегда ли возможна успешная посадка корабля на планету?

9. The surface of some spherical planet consists of oceans and land (lots of little islands). More than a half planet's surface is covered with land. It is also a known fact that the land is a set belonging to Borel σ-algebra on sphere.

A spaceship wants to land on the planet. The spaceship is designed such that the end of his 2020 legs can lay on the planet's surface. The landing is successful if at least 1011 of 2020 legs lay on the land. Is landing can be always completed successfully?

Решение.

(a) Зафиксируем произвольное положение 2020 ножек корабля на сфере в качестве начального положения.
(b) Считаем площадь планеты равной единице.
(c) Выберем в качестве пространства элементарных событий множество всех движений на сфере относительного данного начального положения, и каждой из 2020 ножек корабля поставим в соответствие случайную величину $\xi_i, i = 1, \ldots, 2020$, так что для заданного элементарного события ω
  - $\xi_i(\omega) = 1$, если при соответствующем движении планеты i-я ножка корабля окажется на суше;
  - $\xi_i(\omega) = 0$, если при соответствующем движении планеты i-я ножка корабля попадет в океан.

(d) Тогда математическое ожидание $\mathtt{E}\xi_i$ равно площади суши на планете, и по условию задачи $\mathtt{E}\xi_i > 1/2$. Поэтому

$$\mathtt{E}(\xi_1 + \cdots + \xi_{2020}) > 1010.$$

(e) Поскольку случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_{2020}$ принимает только целые значения, найдется элементарное событие ω, для которого $\xi(\omega) \geq 1011$.

Значит, при движении относительного начального состояния, которому соответствует элементарное событие ω, количество ножек корабля, попадающих на сушу, равно $\xi(\omega) > 1011$, поэтому возможна успешная посадка корабля на планету.

Критерии:
Решение через математическое ожидание

- Введена случайная функция на ножках корабля: 2 балла.
- Введена случайная величина–количество ножек на суше: 2 балла.
- Указана линейность математического ожидания: 3 балла.
- Вычислено математическое ожидание числа ножек на суше: 1 балл.
- Сделан вывод о существовании искомого графа на основании вычисленного математического ожидания: 2 балла.

Альтернативные решения

- На усмотрение проверяющего.

10. Дана матрица покупок двумя пользователями трех товаров: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (3 балла) Найдите такие булевы матрицы P и Q ($P_{il}, Q_{lj} \in \{0,1\}$), что $A = P \circ Q^T$ или в покомпонентной форме $A_{ij} = \bigvee\limits_{l=1}^{k} P_{ik} \cdot Q_{kj}$.

2) (7 баллов) Используя определение сингулярного разложения матрицы, найдите U, Σ и V. Известно, что $\sigma_1 = \sqrt{2}$.

Определение. Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times m}(n < m)$, ее сингулярное разложение имеет вид $A = U\Sigma V^T$, где $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ортогональная матрица левых сингулярных векторов ($UU^T = I$), $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – ортогональная матрица правых сингулярных векторов ($VV^T = I$), Σ – матрица сингулярных чисел $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times m}$, такая что $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$), а $\Sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

10. There is a user-item matrix of purchasing three items by two users: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (3 points) Find the boolean matrices P and Q ($P_{il}, Q_{lj} \in \{0,1\}$), such that $A = P \circ Q^T$ or in element-wise form $A_{ij} = \bigvee\limits_{l=1}^{k} P_{ik} \cdot Q_{kj}$.

2) (7 points) Based on the definition of singular value decomposition find U, Σ и V. It is known that $\sigma_1 = \sqrt{2}$.

Definition. For matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}(n < m)$, its singular value decomposition is $A = U\Sigma V^T$, where $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a left-singular vectors orthogonal matrix, ($UU^T = I$), $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is a right-singular vectors orthogonal matrix ($VV^T = I$), Σ is a matrix of singular values $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times m}$, such that $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$), and $\Sigma_{ij} = 0$ with $i \neq j$.

Решение.
1) Искомое разложение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Искомое разложение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Критерии:

- дан неверный ответ (исключая арифметические ошибки) на все задания задачи — **0** баллов за всю задачу вне зависимости от остального;
- верный ответ без объяснений для одного из заданий оценивается в **1** балл;
- дан верный ответ по одному из заданий с корректными объяснениями — **полный** балл по заданию;
- допущены арифметические ошибки — **1-2** балла за первое задание и **1-5** за второе;
- разложение во втором задании дает исходный результат, но нарушены условия определения — **1-3** балла.