Олимпиада для студентов и выпускников – 2020 г.

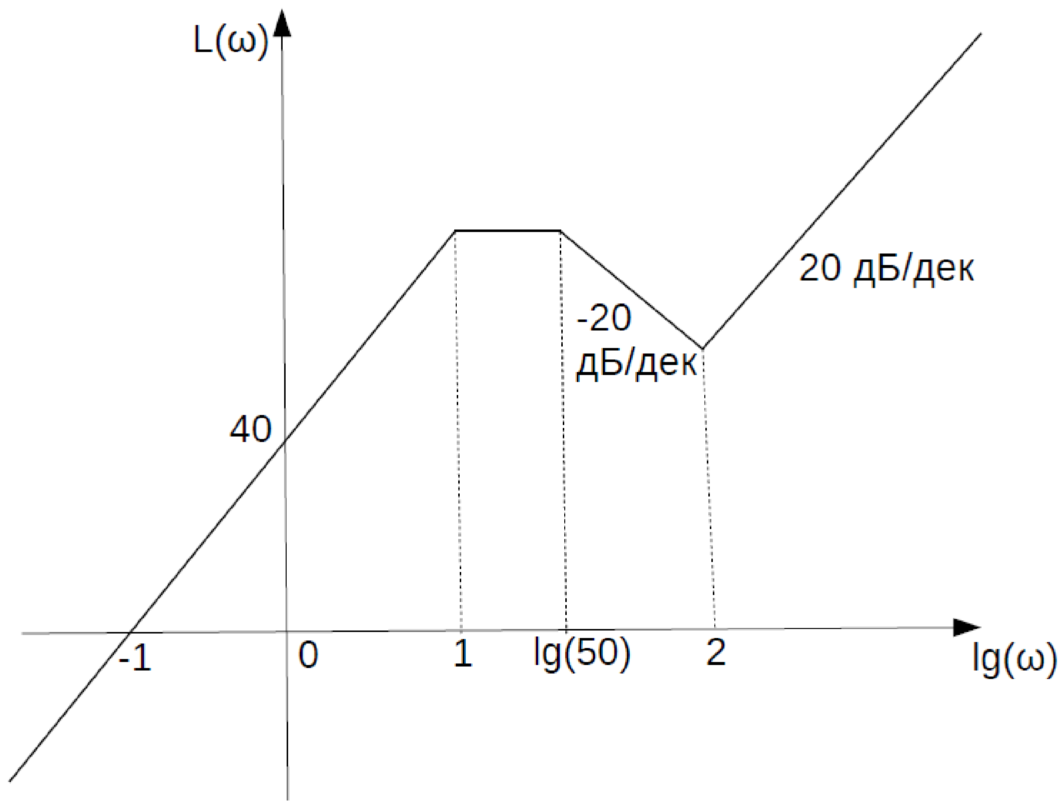
Направление «Прикладная математика»
Профиль: «Прикладная математика»

Время выполнения задания – 240 мин.

Задача 1 (20 баллов).

Задана асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) системы. Требуется:

1. Указать по виду асимптотической ЛАЧХ, на каких частотах система усиливает сигнал.
2. Найти сопрягающие частоты и соответствующие им постоянные времени.
3. Записать передаточную функцию для системы, соответствующую заданной ЛАЧХ, считая, что все элементарные звенья являются устойчивыми.
4. Указать, из каких типов элементарных звеньев состоит заданная система.
5. Составить дифференциальное уравнение системы с полученной передаточной функцией.
6. Исследовать устойчивость замкнутой и разомкнутой систем, если передаточная функция разомкнутой найдена в пункте 3.



Решение

1. **Указать по виду асимптотической ЛАЧХ, на каких частотах система усиливает сигнал. (2 балла)**

$L(\omega) > 0$ соответствует тем частотам, на которых система усиливает сигнал, т.е. в данном случае при $\omega > 0.1$.

2. **Найти сопрягающие частоты и соответствующие им постоянные времени. (3 балла)**

Сопрягающие частоты – это такие частоты, на которых ЛАЧХ претерпевает излом.

В данном случае, это $\omega_1 = 10, \omega_2 = 50, \omega_3 = 100$. Соответствующие им постоянные времени вычисляются по формуле $T_i = \frac{1}{\omega_i}, i = 1,2,3$. Значит, $T_1 = 0.1, T_2 = 0.02, T_3 = 0.01$.

3. **Записать передаточную функцию для системы, соответствующую заданной ЛАЧХ, считая, что все элементарные звенья являются устойчивыми. (4 балла)**

Общий вид передаточной функции системы следующий:

$$W(s) = \frac{k}{s^\nu} \prod_{i=1}^{3} W_i(s),$$

где $W_i(s)$ – передаточные функции элементарных звеньев.

- *Поиск* k. Первая асимптота проходит через точку $\omega = 1, L(1) = 20lg(k)$. Значит, $k = 100$.

- *Поиск* ν. Первая асимптота проходит под углом 20ν дБ/дек. В данном случае, $\nu = 2$.

- *Вторая асимптота.* $\Delta\varphi_1 = -40$ дБ/дек $\Longrightarrow W_1(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1}, \xi \in (0,1)$. Выберем $\xi = 1/2$, тогда

$$W_1(s) = \frac{1}{0.01s^2 + 0.1s + 1}.$$

- *Третья асимптота.* $\Delta\varphi_2 = -20$ дБ/дек $\Longrightarrow W_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}, \xi \in (0,1) = \frac{1}{0.02s + 1}$.

- *Четвертая асимптота.* $\Delta\varphi_3 = 40$ дБ/дек $\Longrightarrow W_3(s) = T_3^2 s^2 + 2\xi T_3 s + 1, \xi \in (0,1)$. Выберем $\xi = 1/2$, тогда

$$W_3(s) = 0.0001s^2 + 0.01s + 1.$$

Таким образом, $W(s) = \frac{100(0.0001s^2+0.01s+1)}{s^2(0.01s^2+0.1s+1)(0.02s+1)}$.

4. **Указать, из каких типов элементарных звеньев состоит заданная система. (2 балла)**

$W_1(s) = \frac{1}{0.01s^2+0.1s+1}$ – колебательное звено, $W_2(s) = \frac{1}{0.02s+1}$ – апериодическое звено, $W_3(s) = 0.0001s^2 + 0.01s + 1$ – форсирующее звено второго порядка.

5. **Составить дифференциальное уравнение системы с полученной передаточной функцией. (3 балла)**

Данная система представляет собой систему с одним входом u и одним выходом y. Найдем собственный оператор $Q(p)$ и оператор воздействия $P(p)$, зная, что $W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$:

$$P(p) = 0.01p^2 + p + 100, \quad Q(p) = 0{,}0002p^5 + 0{,}012p^4 + 0{,}102p^3 + p^2.$$

В символической форме дифференциальное уравнение можно записать как

$$Q(p)y(t) = P(p)u(t).$$

Вспомнив, что $p = \frac{d}{dt}$, а $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$, выпишем дифференциальное уравнение

$$0.0002y^{(5)} + 0.012y^{(4)} + 0{,}102\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) = 0.01\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 100u(t).$$

6. **Исследовать устойчивость замкнутой и разомкнутой систем, если передаточная функция разомкнутой найдена в пункте 3. (6 баллов)**

Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид

$$Q(p)|_{p=\lambda} = 0{,}0002\lambda^5 + 0{,}012\lambda^4 + 0{,}102\lambda^3 + \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Не выполнено необходимое условие устойчивости, так как в характеристическом полиноме есть нулевые коэффициенты.

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$(Q(p) + P(p))|_{p=\lambda} = 0{,}0002\lambda^5 + 0{,}012\lambda^4 + 0{,}102\lambda^3 + 1.01\lambda^2 + \lambda + 100.$$

Все коэффициенты полинома положительны, значит, выполнено необходимое условие устойчивости. Проверим устойчивость по критерию Льенара-Шипара (можно использовать и другие критерии). Матрица Гурвица для этой системы равна

$$H = \begin{pmatrix} 0.012 & 1.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0002 & 0.102 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 1.01 & 100 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.102 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012 & 1.01 & 100 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 < 0$, значит, замкнутая система тоже неустойчива.

Задача 2 (15 баллов).

Построить график функции

$$y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$$

при различных значениях параметров *a* и *b*.

Решение

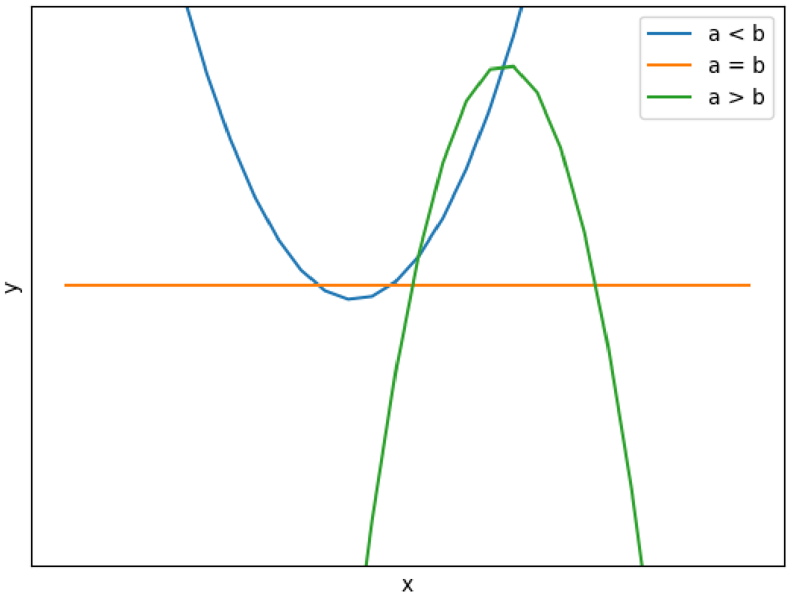
Раскроем определитель матрицы (например, по третьему столбцу):

$$y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot(a^2 - b^2) - x^2(a-b) + ab^2 - a^2b =$$

$$= (b-a)\cdot(x^2 - (b+a)\cdot x + ab) = (b-a)(x-a)(x-b)$$

Имеем, 3 случая:

1) – прямая y=0
2) a>b – парабола ветвями вниз (нули в точках x=a, x=b)
3) a<b – парабола ветвями вверх (нули в точках x=a, x=b)



Задача 3 (10 баллов).

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$(1) \qquad du/dt = f(t, u), \qquad u(t=0) = u_0$$

где $u(t)$ неизвестная функция действительного переменного t, а правая часть $f(t, u)$ есть известная функция двух переменных.

Для численного решения задачи Коши (1) вводится равномерная сетка $t_n = \tau\, n$, где $n=0, 1, 2, \ldots,$ и дифференциальное уравнение заменяется конечно-разностным уравнением на сеточную функцию y_n. Величину $\tau > 0$ назовем шагом сетки.

Рассмотрим уравнение (1) с правой частью вида

$$(2) \qquad f(t, u) = \lambda\, u,$$

где $\lambda < 0$ – заданное действительное число.

Конечно-разностную схему назовем *абсолютно устойчивой* если решение конечно-разностного уравнения, y_n, соответствующего задаче Коши (1)-(2) является монотонно убывающей функцией n для любых значений $\tau > 0$. В противном случае – если при достаточно больших значениях τ решение теряет свойство монотонности либо растет неограниченно – схему назовем *условной устойчивой*.

Определить, является ли схема

$$(3) \qquad (y_{n+1} - y_{n-1}) / 2\tau = (1/6)\,(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

абсолютно или условно устойчивой.

Решение

Конечно-разностная схема принимает вид

$$(y_{n+1} - y_{n-1}) / 2\tau = (1/6)\,(\lambda\, y_{n+1} + 4\,\lambda\, y_n + \lambda\, y_{n-1})$$

Ищем решение рекуррентного соотношения (3) в виде $y_n = q^n$. Сокращая общие множители, получаем характеристическое уравнение

$$q^2 - 1 = z\,(q^2 + 4\,q + 1)$$

где $z = \lambda\, \tau / 3$.

Решения характеристического уравнения имеет вид

$$q = (2z \pm\sqrt{(1+3z^2)}) / (1-z)$$

При стремлении z к минус бесконечности, решения характеристического уравнения стремятся к $-2 \pm\sqrt{3}$, т.е. одно из решений по модулю больше единицы. Соответствующее частное решение рекуррентного соотношения с ростом n не убывает, следовательно, конечно-разностная схема является условно устойчивой.

Задача 4 (25 баллов).

На вход 2-х канальной системы обслуживания поступают заявки согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $a > 0$. Время обслуживания заявки на i - ом канале – случайная величина η_i, имеющая экспоненциальное распределение со средним значением $\frac{1}{b_i}$ $(b_i > 0, i = 1,2)$. Случайные величины η_1, η_2 независимы и не зависят от входного потока заявок. Предполагается, что «система с отказами», то есть, заявка, застающая оба канала занятыми, уходит из системы необслуженной, т.е. «теряется». Если оба канала свободны, то заявка выбирает канал для обслуживания с вероятностью $\frac{1}{2}$.

1. Построить марковский случайный процесс с непрерывным временем, описывающий работу системы. Обосновать марковское свойство.

2. Найти в установившемся режиме распределение числа заявок в системе.

3. Предположим, что $b_1 + b_2 = \beta$. Найти, при каких значениях b_1 и b_2, удовлетворяющих этому условию, в установившемся режиме достигается минимум вероятности «потери заявки», то есть, вероятности того, что заявка уйдет из системы необслуженной.

Решение.

Факт 1. В пуассоновском потоке с интенсивностью a интервалы между последовательными событиями образуют последовательность независимых случайных величин, каждая из которых распределена экспоненциально с параметром a. Напомним, что плотность распределения такой случайной величины есть $p(x) = ae^{-ax}$ при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$, а её среднее (математической ожидание) есть a^{-1}.

Факт 2. Экспоненциальное распределение обладает свойством "отсутствия памяти", одна из формулировок которого такова

$$P(\xi > T + t \mid \xi > T) = P(\xi > t), \qquad t, T > 0,$$

где ξ - с.в. с экспоненциальным распределением.

Факт 3. Если ξ_1 и ξ_2 — независимые экспоненциальные с.в. с параметрами α_1 и α_2, то с.в. $\min(\xi_1, \xi_2)$ распределена экспоненциально с параметром $\alpha_1 + \alpha_2$ и

$$P(\xi_1 = \min(\xi_1, \xi_2)) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Решение п.1. Определим случайный процесс $X(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t)\right)$, где $\xi_i(t)$ принимает значение 0, если i -ый канал в момент времени t свободен, и значение 1, если i - ый канал в момент времени t занят. Таким образом, пространство состояний с.п. $X(t)$ состоит из 4 элементов: $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Занумеруем состояния следующим образом: $(0,0) = 1, (0,1) = 2, (1,0) = 3, (1,1) = 4$. Случайный процесс $X(t)$ является однородным марковским процессом, так как в силу фактов 1-3 на поведение процесса $X(t)$ после момента t_0 влияет только значение $X(t_0)$, но не траектория этого процесса до момента t_0. Матрица интенсивностей $Q = \left(q_{jk}\right)$ (инфинитезимальная матрица) построенного процесса имеет следующий вид

$$Q = \begin{pmatrix} -a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ b_2 & -(a+b_2) & 0 & a \\ b_1 & 0 & -(a+b_1) & a \\ 0 & b_1 & b_2 & -(b_1+b_2) \end{pmatrix}$$

Решение п.2. Обозначим $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ строку из стационарных вероятностей (что и соответствует *установившемуся режиму*). Для нахождения π используем систему линейных уравнений $\pi Q = 0$.

$$-a\pi_1 + b_2\pi_2 + b_1\pi_3 = 0, \quad \frac{a}{2}\pi_1 - (a+b_2)\pi_2 + b_1\pi_4 = 0$$

$$\frac{a}{2}\pi_1 - (a+b_1)\pi_3 + b_2\pi_4 = 0, \quad a\pi_2 + a\pi_3 - (b_1+b_2)\pi_4 = 0 \qquad (1)$$

Добавим условие нормировки:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \qquad (2)$$

Решение системы (1)-(2) имеет вид:

$$\left(\frac{2b_1b_2}{\kappa}, \frac{ab_1}{\kappa}, \frac{ab_2}{\kappa}, \frac{a^2}{\kappa}\right),$$

где $\kappa = a(a+b_2) + b_1(a+2b_2)$.

Обозначим s - число заявок в системе в установившемся режиме, тогда распределение случайной величины s имеет вид

$$P(s=0) = \pi_1 = \frac{2b_1b_2}{\kappa}, \quad P(s=1) = \pi_1 + \pi_2 = \frac{a(b_1+b_2)}{\kappa}, \quad P(s=2) = \pi_4 = \frac{a^2}{\kappa}$$

Решение п.3. В установившемся режиме вероятность потери заявки есть π_4. Найдем ее минимум при условии, что $b_1 + b_2 = \beta$.

Имеем $b_2 = \beta - b_1$. Тогда

$$\pi_4 = \frac{a^2}{a(a+\beta-b_1)+b_1\big(a+2(\beta-b_1)\big)} = \frac{a^2}{a^2+a\beta+2\beta b_1-2b_1^2}$$

Заметим, что b_1 входит только в знаменатель π_4. Следовательно, минимум π_4 достигается в точке максимума знаменателя. Знаменатель - квадратичная относительно b_1 функция, ее график – парабола с ветвями вниз. Максимум - в вершине параболы: $b_1 = \beta/2 \in (0,\beta)$. Таким образом, минимум вероятности потери заявки (в установившемся режиме) при условии, что $b_1 + b_2 = \beta$, достигается при $b_1 = b_2 = \beta/2$.

Замечание. Возможен другой вариант вычисления минимума вероятности потери заявки. Для этого вычислим производную π_4 по переменной b_1:

$$\frac{d\pi_4}{db_1} = \frac{-a^2(2\beta-4b_1)}{\left(a^2+a\beta+2\beta b_1-2b_1^2\right)^2}$$

$$\frac{d\pi_4}{db_1} = 0 \Leftrightarrow b_1 = \frac{\beta}{2}$$

Покажем, что в точке $b_1 = \beta/2$ функция $\pi_4(b_1)$ имеет минимум. Для этого рассмотрим поведение $\frac{d\pi_4}{db_1}$ на интервале $(0,\beta)$. При b_1, близких к 0, $\frac{d\pi_4}{db_1} < 0$, при b_1, близких к β, $\frac{d\pi_4}{db_1} > 0$. При этом, $\frac{d\pi_4}{db_1}$ обращается в 0 только в одной точке $b_1 = \frac{\beta}{2}$. Следовательно, на интервале $(0,\beta/2)$ функция $\pi_4(b_1)$ убывает, на интервале $(\beta/2,\beta)$ функция $\pi_4(b_1)$ возрастает. Таким образом, $b_1 = \beta/2$ – точка глобального минимума функции $\pi_4(b_1)$ на интервале $(0,\beta)$.

Задача 5 (30 баллов).

Определить значения переменных *a, b, c, d, a1, b1, c1,* а также содержимое массивов *buf* и *buf1* после выполнения программы на языке программирования Си в UNIX-подобной операционной системе при условии, что файла *a.txt* не существует в текущей директории. Что изменится при повторном запуске программы. Обосновать свое решение.

```
#include <stdio.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>
#include <fcntl.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/wait.h>

int main()
{
	int a=4, b=4, c=4, d=4, a1=4, b1=4, c1=4, p[2];
	char buf[50], buf1[50];
	memset(buf,0,50); memset(buf1,0,50);
	close(1);
	pipe(p);
	creat("a.txt",600);
	close(0);
	dup(p[0]);
	if(fork()==0)
	{
		close(p[0]);
		dup(p[1]);
		printf("time\n");
		c=write(a,"data",5);
		a=open("a.txt",0);
		b=read(a,buf,2);
		d = write(1,"realy", 4);
		exit(2);
	}
	else
	{
		wait(&b1);
		close(p[1]);
		scanf("%s", buf);
		a1=read(p[0], buf1, 6);
		c1=open("a.txt",0);
	}
}
```

Решение

При «запуске» программы операционная система создает процесс и одновременно автоматически открывает для него файлы стандартного ввода, стандартного вывода и стандартного протокола с пользовательскими дескрипторами файлов **0, 1** и **2**, соответственно, т.е. информация об этих файлах запишется в 0-ой, 1-ой и 2-ой строках таблицы пользовательских дескрипторов файлов (ТПДФ) открытых процессом. Далее, при выполнении процесса сначала выделяется память под переменные **a, b, c, d, a1, b1, c1** (п. 1) и массивы **p, buf, buf1** (пп. 1, 2), осуществляется инициализация данных (пп. 1, 3), закрывается файл с пользовательским дескриптором **1** (**close(1);** п. 4). При закрытии файла строка с индексом 1 в ТПДФ освобождается. После этого открываются два файла с пользовательскими дескрипторами **p[0]** и **p[1]** (п. 5, создание межпроцессного канала), причем они занимают первые свободные строки в ТПДФ процесса, т.е. **p[0]=1, p[1]=3,** и p[0]открыт на чтение, p[1]открыт на запись.

На следующем этапе выполняется системный вызов (СВ) **creat()** (п. 6). Т.к. файла с именем a.txt в текущем каталоге нет, то СВ creat() создает такой файл в текущем каталоге и одновременно открывает его на запись. При этом, следует учитывать, что права доступа к файлу (600) заданы в десятичной системе счисления. В двоичной системе счисления 600_{10}=1\`001\`011\`000_2. Рассматривая последние 9 битов, видно, что права доступа к файлу позволяют владельцу файла (владельцу текущего процесса) только выполнять этот файл, но не читать его и не писать в него. СВ creat() записывает в первую свободную запись ТПДФ сведения о файле. Индекс (номер) этой записи **4**.

Далее (п. 7) закрывается файл с пользовательским дескриптором 0, - в ТПДФ освобождается запись с индексом 0. После исполнения СВ dup() (п. 8) в эту запись скопируются данные файла с пользовательским дескриптором p[0]).

При выполнении СВ fork() (п. 9) процесс разбивается на две копии («процесс-отец» и « процесс-сын»), которые начинают работать параллельно. Значения всех переменных, массивов и открытых файлов на начальном этапе выполнения идентичны для обоих процессов.

«Процесс-сын» сначала закрывает файл с пользовательским дескриптором p[0] (п. 10), тем самым очищая запись в ТПДФ с номером 1. Далее копирует в неё (в первую свободную запись ТПДФ) данные файла с пользовательским дескриптором p[1] (п. 11) и записывает в буфер вывода этого файла (функция printf() всегда пишет в файл стандартного вывода, т.е. в файл с пользовательским дескриптором 1) цепочку символов «time\n» (п. 12). После этого записывает в файл с пользовательским дескриптором 4 (п. 13), а это файл a.txt (см. п. 6), цепочку из 5 символов «data?». Это можно сделать, несмотря на права доступа к этому файлу, т.к. он уже открыт на запись. Причем, в отличие от библиотечных функций ввода/вывода, СВ write() пишет напрямую, без буферизации. СВ write() возвращает число записанных символов, т.е. **c=5**.

Далее выполняется СВ open() (п. 14) (открыть файл для чтения). Т.к. права доступа к файлу a.txt не позволяют владельцу читать этот файл, СВ вернет -1, т.е. **a=-1**. Попытка считать информацию из файла с пользовательским дескриптором -1 (п. 15) всегда завершается неудачно, поэтому **b=-1**.

Далее процесс сын пишет без буферизации (п. 16) в файл с пользовательским дескриптором 1 (а это p[1], межпроцессный канал) 4 байта, т.е. цепочку символов «real». СВ write() вернет количество записанных байтов, т.е. **d=4**.

После выполнения библиотечной функции exit() (п. 17) выталкиваются все буфера ввода/вывода, закрываются все открытые файлы и завершается «процесс-сын». Следует заметить, что в межпроцессном канале окажется цепочка символов «realtime», а значения запрашиваемых переменных и массивов: **a=-1, b=-1, c=5, d=4, a1=4, b1=4, c1=4, buf= «пусто», buf1= «пусто»**.

«Процесс-отец» дождался завершения «процесса-сына» (п. 18). В аргумент СВ wait() (п. 18) запишется причина гибели «процесса-сына». Т.к. «процесс-сын» завершился по функции exit(), то в биты с 8 по 15 переменной b1(с 0-го бита по 7-ой бит – нулевые) запишется значение аргумента функции exit(), т.е. 2. Переводя 2 в двоичную систему, можно констатировать, - в 8 бит запишется 0, в 9 бит – 1. Таким образом, значение переменной **b1 =** 2^9**=512.** Далее выполняется СВ close() (п. 19). Очищается строка ТПДФ процесса с индексом p[1], т.е. 3. После этого из файла с пользовательским дескриптором 0 считывается цепочка символов до пробела в массив buf (п. 20). Т.к. это межпроцессный канал (в строке ТПДФ процесса в 0-ой записи указан p[0]), в массив buf запишется цепочка символов из межпроцессного канала, т.е. **buf= «realtime».**

Выполнение СВ read() (п. 21) связано с чтением из межпроцессного канала 6 байтов и записи их значений в массив buf1. Т.к. в межпроцессном канале уже не осталось данных, и со стороны «процесса-сына» он закрыт на запись, при чтении будет получен код ответа 0, что означает признак конца файла., т.е. **a1=0, buf1= «пусто».**

Последняя инструкция (п. 22) связана с чтением из файла с пользовательским дескриптором c1 = 4 в массив buf1 5-ти байтов. Т.к. это файл a.txt и открыт он «только на запись» (читать его нельзя), поэтому СВ read() вернет код ошибки -1, т.е. **c1 = -1**.

На этом «процесс-отец» завершается.

При повторном запуске программы следует отметить, что файл с именем a.txt уже существует в текущем каталоге. Поэтому, т.к. права доступа к нему не позволяют владельцу осуществлять его модификацию (писать в файл), СВ creat() (п. 6) не сможет пересоздать этот файл и вернет код ошибки (4-ая запись ТПДФ процесса так и останется пустой), а при попытке записи 5 байтов в файл с пользовательским дескриптором 4 (п. 13), СВ write() также вернет код ошибки, т.е. **c =-1**. Остальные переменные и значения массивов останутся без изменений.

Итоговый ответ на решение задачи можно отразить в виде таблицы:

	«процесс-сын»	***«процесс-отец»***
a	*-1*	*4*
b	*-1*	*4*
c	*5 (-1)*	*4*
d	*4*	*4*
a1	*4*	*0*
b1	*4*	*512*
c1	*4*	*-1*
buf	*пусто*	*realtime*
buf1	*пусто*	*пусто*