Направление и профиль “Математические методы анализа экономики”, код 120

1. (10%) Find the following limit:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Note that $|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| \le |\sin(x)|$ or equivalently $-\sin(x) \le |\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| \le \sin(x)$ **(5 points)**. Since $\lim_{x\to 0}(-\sin(x)) = \lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ **(3 points)**, by the virtue of the sandwich theorem we find that $\lim_{x\to 0}\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ **(2 points)**.

2. (10%) Consider the function

$$g(b) = f(f(f(b^2 f(b)))).$$

Find $g'(1)$ if $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1, f'(1) = 3, f'(2) = 1, f'(3) = 2$.

We can apply the chain rule:

$$g'(b) = f'(f(f(b^2 f(b))))f'(f(b^2 f(b)))f'(b^2 f(b))(2bf(b) + b^2 f'(b))$$

(4 points). We can now substitute $b = 1$ into this formula:

$$g'(1) = f'(f(f(f(1))))f'(f(f(1)))f'(f(1))(2f(1) + f'(1))$$

(1 point). Substituting values of f and its derivative into this formula, we get

$$g'(1) = f'(f(f(f(2))))f'(f(f(2)))f'(f(2))(2f(1) + f'(1)) = f'(f(f(3)))f'(f(3))f'(3)(4+3) = f'(f(1))f'(1)\cdot 2\cdot 7 = f'(2)\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 42$$

(5 points).

3. (10%) The entrepreneur plans to open several points of sale and a Central warehouse for their supply on one side of the highway, which goes strictly in a straight line. For reasons of economy, he wants the shortest distance from the Central warehouse to any of the points of sale to be half as short as the shortest distance from that point to the highway. Local conditions allowed placing the Central warehouse in such a way that the shortest distance from it to the highway is 500 meters.

   1. What form will have a track connecting all possible points of location of points of sales?
   2. Whether it is possible to estimate the maximum and minimum removal from the highway of possible points of placement of points of sale and, if it is possible, what these removals will be equal.

   Instruction. It is necessary to give all the formulas for calculations and carry out arithmetic calculations. The numeric answer must be given with one character after the decimal point.

Прежде всего, отметим, что кратчайшее расстояние между двумя точками равно длине отрезка, соединяющего эти точки, а кратчайшее расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Условие размещения пунктов продаж и склада говорит о том, что пункты продаж должны располагаться на кривой второго порядка, шоссе является директрисой, а склад является ее фокусом.

Расстояние от фокуса до директрисы $q = 500.0$ м. Из этого же условия эксцентриситет кривой равен $0.5\,(\varepsilon = 0.5)$. Фокальный параметр $p = \varepsilon q = 250.0\ m$.

Поскольку эксцентриситет меньше единицы, то возможные точки размещения пунктов продаж расположены на кривой второго порядка, имеющей форму эллипса. (Ответ на первый вопрос!) Поскольку возможные точки размещения пунктов продаж расположены на замкнутой кривой, мы можем оценить их максимальное и минимальное удаление от шоссе. (Первая часть ответа на второй вопрос!). Найти минимальное расстояние можно сразу из условия задачи. Очевидно, что ближайшая к дороге точка продаж находится на перпендикуляре опущенного из точки размещения склада на дорогу. Длина перпендикуляра – 500.0 м. Таким образом, минимальное удаление от дороги - $\Delta_{min} = 1000.0/3 \approx 333.3$ м. Полуось эллипса ортогональная дороге (директрисе эллипса) $a = \frac{p}{(1-\varepsilon^2)} = \frac{1000.0}{3} \approx 333.3$ m. Таким образом, максимальное удаление возможной точки продаж $\Delta_{max} = \Delta_{min} + 2 * a = 1000.0$ m. (Вторая часть ответа на второй вопрос!)

Критерий. Ответ на первый вопрос четыре балла, ответ на второй вопрос – каждая часть по три балла.

4. (10%) Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad H := A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Find

1. (1 point) A^Tb;
2. (1 point) A^TA;
3. (1 point) $\det(A^TA)$;
4. (1 point) $(A^TA)^{-1}$;
5. (1 point) $(A^TA)^{-1}A^Tb$;
6. (1 point) H;
7. (2 points) eigenvalues of H;
8. (2 points) some basis from the eigenvectors of the matrix H.

1. $A^Tb = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\det(A^TA) = 2$.

4. $(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

5. $(A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

6. $H = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. We have

$$|H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \Big((1/2-\lambda)^2 - (1/2)^2\Big) \cdot \big(1-\lambda\big) =$$

$$= \big(1/2 - \lambda - 1/2\big) \cdot \big(1/2 - \lambda + 1/2\big) \cdot \big(1 - \lambda\big) =$$
$$= -\lambda\big(1 - \lambda\big)^2.$$

Thus, the eigenvalues of H are $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

8. We find eigenvectors of H corresponding to $\lambda_1 = 0$. We have

$$\big(H - \lambda_1 I\big|\mathbf{0}\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

So, eigenvector of H corresponding to $\lambda_1 = 0$ is $h_1 = (-1,\, 1,\, 0)^T$.

We find eigenvectors of H corresponding to $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. We have

$$\big(H - \lambda_2 I\big|\mathbf{0}\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

So, linearly independent system of eigenvectors matrix of H corresponding to $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ is

$$h_2 = (1,\, 1,\, 0)^T, \quad h_3 = (0,\, 0,\, 1)^T.$$

Hence, the basis from the eigenvectors of the matrix H is

$$h_1 = (-1,\, 1,\, 0)^T, \quad h_2 = (1,\, 1,\, 0)^T, \quad h_3 = (0,\, 0,\, 1)^T.$$

5. (10%) Find the point of the conditional minimum of the function and the minimum value itself for different values of the parameter $a > 2$.

   Function: $F\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 3\right)^2$.

   Condition:

$$\begin{cases} 0 \le x_2 \le 4, \\ x_2 \le a x_1, \\ x_2 \ge 2x_1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}.$$

1. Отметим, что функция $F\left(x_1, x_2\right)$ является всюду строго выпуклой и имеет безусловный глобальный экстремум (минимум) в точке (1,3). Минимум равен нулю.
2. 2. Область решений неравенств в условии зависит от значения параметра a.
   (a) Случай I. $2 < a < 3$. Область решений является треугольником, ограниченным отрезками прямых из условий. Она является выпуклой, но не содержит точку безусловного глобального экстремума $F\left(x_1, x_2\right)$. Необходимо исследовать поведение данной функции на границе области решений.
      i. Участок границы — отрезок прямой $x_2 = a x_1$ от $(0,0)$ до линии из первого условия — точка $\left(x_1, x_2\right) = \left(\frac{4}{a},\ 4\right)$. В этом случае задача сводится к поиску минимума функции $f\left(x\right) = \left(1 + a^2\right) x_1^2 - \left(2 + 6a\right) x_1 + 10$ на отрезке $x_1 \in \left[0,\, \frac{4}{a}\right]$. Функция $f\left(x\right)$ не имеет действительных корней и имеет минимум в точке $x_1 = \frac{1+3a}{1+a^2} < \frac{4}{a}$. Следовательно на этом участке границы функция $F\left(x_1, x_2\right)$ имеет минимум в точке $\left(x_1, x_2\right) = \left(\frac{1+3a}{1+a^2}, a\frac{1+3a}{1+a^2}\right)$. Минимум равен $10 - \frac{(1+3a)^2}{1+a^2} = \frac{(a-3)^2}{1+a^2} < 0.2$, поскольку величина минимума, как функция от a убывает на отрезке (2,3].

ii. Участок границы — отрезок прямой $x_2 = 4$ на отрезке $x_1 \in \left[\frac{4}{a}, 2\right]$. В этом случае задача сводится к поиску минимума функции $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 1$ на указанном отрезке. Функция $f(x)$ не имеет действительных корней и имеет минимум в точке $x_1 = 1 < \frac{4}{a}$, вследствие того, что $2 < a < 3$. На отрезке $\left[\frac{4}{a}, 2\right]$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно на этом участке границы функция $F(x_1, x_2)$ имеет минимум в точке $(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{a}, 4\right)$. Минимум равен $\frac{(4-a)^2}{a^2} + 1 > 0.2$

(b) Случай II. $a \geq 3$. В этом случае область решений неравенств в условии содержит точку глобального минимума функции $F(x_1, x_2)$. Поскольку $F(x_1, x_2)$ является выпуклой и область решений неравенств в условии также выпуклая, точка условного минимума совпадает с точкой безусловного глобального минимума (1, 3). Минимум равен нулю.

Подведем итог.

1. Случай $2 < a < 3. F_{min} = F\left(\frac{1+3a}{1+a^2}, a\frac{1+3a}{1+a^2}\right) = \frac{(a-3)^2}{1+a^2}$.
2. Случай $a > 3. F_{min} = F(1, 3) = 0$.

Критерий. Пункт 1 — два балла, 2.1 — пять баллов, пункт 2.2 — 3 балла.

6. Find a partial solution of differential equation

$$y^{(4)} + y^{(2)} = 2\cos x,$$

that satisfies the following conditions $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ and $y''(0) = y'''(0) = 0$.

We have the following characteristic equation

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0.$$

It is easy to see that $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$ and $\lambda_4 = -i$ are the solutions of this characteristic equation. Hence, the general solution of the corresponding homogenous differential equation is

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad \text{where } C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

The partial solution of inhomogeneous differential equation will be found in the form

$$y(x) = x(A\cos x + B\sin x), \quad \text{where } A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Substituting a partial solution with uncertain coefficients into the original differential equation, we obtain that $A = 0$ and $B = -1$.

The general solution of inhomogeneous differential equation is as follows

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x\sin x, \quad \text{where } C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Next, taking into account conditions $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ and $y''(0) = y'''(0) = 0$ we get that $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -2$ and $C_4 = 0$. Thus, the required partial solution of differential equation is

$$y(x) = x - 2\cos x - x\sin x.$$

Критерий:

- 1 балл за выписанное характеристическое уравнение;
- 1 балла за правильное решение характеристического уравнения;

- 2 балла за правильно выписанное общее решение однородного уравнения с неопределенными коэффициентами;
- 2 балла за правильно найденное частное решение однородного уравнения;
- 2 балл за правильно выписанное общее решение неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами;
- 2 балла за правильно найденное частное решение неоднородного уравнения.

7. Consider the process $\varepsilon_t \sim iidN(0,1), t \in Z$. The process X_t is defined in the following manner:

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t, \text{if t is odd,} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_{t-1}^2 - 1), \text{if t is even.} \end{cases}$$

Check whether mathematical expectation, variance and autocovariance of X_t do not depend on t. Autocovariance is a covariance between different variables of the same process, it is formally defined as $cov(X_t, X_{t-s}), s \geq 1$. HINT. $E(\varepsilon_t^4) = 3$.

$$E(X_t) = \begin{cases} E(\varepsilon_t), \text{если t нечетное,} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(E(\varepsilon_{t-1}^2) - 1), \text{если t четное.} \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{если t нечетное,} \\ 0, \text{если t четное.} \end{cases}$$

(1 балл)

$$Var(X_t) = \begin{cases} Var(\varepsilon_t), \text{если t нечетное,} \\ \frac{1}{2}Var(\varepsilon_{t-1}^2), \text{если t четное.} \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{если t нечетное,} \\ 1, \text{если t четное.} \end{cases}$$

(2 балл)

Для автоковариации рассмотрим 4 случая: 1) X_t с четным индексом и X_{t-s} с четным индексом; 2) X_t с нечетным индексом и X_{t-s} с нечетным индексом; 3) X_t с четным индексом и X_{t-s} с нечетным индексом; 4) X_t с нечетным индексом и X_{t-s} с четным индексом.

1. $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$, так как эти величины независимы. **(2 балла)**
2. $cov(\frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_{t-1}^2 - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_{t-1-s}^2 - 1)) = 0$, так как квадраты тоже независимых величин тоже независимы. **(3 балла)**
3. $cov(\varepsilon_t, \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_{t-1-s}^2 - 1)) = 0$. **(1 балл)**
4. Аналогично 3. **(1 балл)**

Таким образом, мы видим, что математическое ожидание, дисперсия и автоковариация не зависят от t.

8. Joint probability density function of random variables X and Y is:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y), \text{ if } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

(a) (2%) Find c

$\int_0^1 \int_0^2 c(x^2+y)dxdy = \frac{11}{3}c = 1$. Hence, $c = \frac{3}{11}$

(b) (3%) Check whether X and Y are independent

$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{11}(x^2+y)dy = \frac{3}{22}(2x^2+1)$, $f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{11}(x^2+y)dx = \frac{2}{11}(3y+4)$. $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, hence, variables are not independent.

(c) (2%) Find $\mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 \frac{3}{22}(2x^2+1)xdx = \frac{15}{11}$

(d) (3%) Find probability $\mathbb{P}(XY > 1)$

$\mathbb{P}(XY > 1) = \int_1^2 \int_{1/x}^1 \frac{3}{11}(x^2+y)dydx = \frac{13}{44}$

9. Consider a sample of independent random variables $X_1, \ldots, X_n$ with constant variance $\sigma^2 > 0$ and increasing mean $\mathbb{E}[X_i] = \beta i$. Two estimators are suggested for β.

$$\hat{\beta} = \frac{X_n - X_1}{n-1}.$$

$$\tilde{\beta} = \frac{(X_{n-1} + X_n) - (X_1 + X_2)}{2(n-2)}.$$

(a) (5%) Is $\hat{\beta}$ consistent?

(b) (5%) Compare the mean squared error of the two estimators for the case $n = 4$.

Let's start with finding mean and variance of both estimators.

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \frac{\beta n - \beta}{n-1} = \beta.$$

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \frac{(\beta(n-1) + \beta n) - (\beta + 2\beta)}{n-2} = \frac{2\beta n - 4\beta}{2(n-2)} = \beta.$$

Both estimators are unbiased.

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{2\sigma^2}{(n-1)^2}.$$

$$Var(\tilde{\beta}) = \frac{4\sigma^2}{4(n-2)^2} = \frac{\sigma^2}{(n-2)^2}.$$

$\hat{\beta}$ is unbiased with $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\beta}) = 0$. Hence, $\hat{\beta}$ is consistent.
As the estimators are unbiased, their MSEs are equal to their variances. If $n = 4$, then

$$MSE(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}) = \frac{2\sigma^2}{(4-1)^2} = \frac{2\sigma^2}{9}.$$

$$MSE(\tilde{\beta}) = Var(\tilde{\beta}) = \frac{\sigma^2}{(4-2)^2} = \frac{\sigma^2}{4} > MSE(\hat{\beta}).$$

10. Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent normal random variables with mean μ and variance σ^2.
Consider two tests for $H_0 : \mu = 1, \sigma^2 = 1$.
Test 1. Reject H_0 if $|\bar{X} - 1| > \frac{2}{3}$, where $\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$.
Test 2. Reject H_0 if $\sum_{i=1}^{9}(X_i - 1)^2 > 14.68$.
Calculate the probability of type I error for

(a) (5%) test 1;

$$P\left(|\bar{X}-1| > \frac{2}{3}\right) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-1}{1/3}\right| > 2\right) = 1 - P\left(-2 < \left|\frac{\bar{X}-1}{1/3}\right| < 2\right) = 1 - 0.9545 = 0.0455.$$

(b) (5%) test 2.

$\sum_{i=1}^{9}(X_i-1)^2$ has chi-squared distribution with 9 degrees of freedom, so

$$P\left(\sum_{i=1}^{9}(X_i-1)^2 > 14.69\right) = 0.1.$$

Good luck!