Направление: «Физика»

Профиль: «Физика» КОД - 370

Разрешается пользоваться калькулятором любой сложности.

Время выполнения задания – 180 мин., язык - русский.

1. Вокруг звезды массы m и радиуса R навстречу вращению звезды вращается пылевой диск, который занимает расстояния от радиуса r_1 до радиуса r_2, причем его плотность ρ на единицу площади считается постоянной. При какой угловой скорости вращения звезды ее вращение остановится после поглощения пыли? Считать, что масса пыли много меньше массы звезды, а по звезде масса распределена равномерно. Указание: считать, что пылинки движутся примерно по круговым орбитам.

2. Найти силу, действующую на сосуд, содержащий Больцмановский газ с плотностью массы ρ за счет вытекания из него в вакуум газа через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) площади S. Считать известными массу молекулы газа m и температуру газа T.

3. Магнит малого размера массы m с магнитным дипольным моментом M парит над сверхпроводящей плоскостью. На какой высоте он будет парить? Какова будет его ориентация? Оцените периоды его колебаний в вертикальной плоскости и период вращений относительно равновесной ориентации.

4. Частица массы m находится в основном состоянии в поле с одномерным потенциалом $U = m\omega^2 x^2/2$. В момент времени $t=0$ частице придан импульс p. Найти вероятность того, что частица останется в основном состоянии.

5. Электрон находится в поле слабо неоднородной линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме. Какая средняя (по периоду волны) сила будет на него действовать?

Решение

Задача 1

Вокруг звезды массы m и радиуса R навстречу вращению звезды вращается пылевой диск, который занимает расстояния от радиуса r_1 до радиуса r_2, причем его плотность ρ на единицу площади считается постоянной. При какой угловой скорости вращения звезды ее вращение остановится после поглощения пыли? Считать, что масса пыли много меньше массы звезды, а по звезде масса распределена равномерно. Указание: считать, что пылинки движутся примерно по круговым орбитам.

Решение

Момент инерции звезды равен $I = \frac{2}{5}mR^2$, а угловой момент равен $I = \frac{2}{5}mR^2\omega$ – угловая скорость вращения звезды. Угловой момент пыли равен

$$L = \int_{r_1}^{r_2} dr\, 2\pi r^2 \rho v,$$

где v – скорость вращения пыли. Подставляя сюда $v = \sqrt{\gamma m/r}$, находим

$$L = \frac{4\pi}{5}\sqrt{\gamma m}\rho\left(r_2^{5/2} - r_1^{5/2}\right).$$

Чтобы звезда остановила свое вращение, угловой момент пыли должен полностью скомпенсировать исходный угловой момент звезды. Приравнивая L к $\frac{2}{5}mR^2\omega$, находим

$$\omega = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\,\rho\left(r_2^{5/2} - r_1^{5/2}\right).$$

Критерии оценивания

Определен момент инерции звезды	4 балла
Определен угловой момент звезды	4 балла
Определен угловой момент пылевого диска	4 балла
Определено условие остановки звезды	4 балла
Получен ответ	4 балла

Задача 2

Найти силу, действующую на сосуд, содержащий Больцмановский газ с плотностью массы ρ за счет вытекания из него в вакуум газа через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) площади S. Считать известными массу молекулы газа m и температуру газа T.

Решение

Обозначим v скорость молекулы газа в направлении стенки. Нас интересуют только молекулы, движущиеся к стенке, то есть $v > 0$. Распределение вероятности этих молекул по скоростям дается Больцмановским фактором

$$N = \sqrt{\frac{2m}{\pi k_B T}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right), \qquad \int_0^\infty dv\, N = 1.$$

Число молекул со скоростями в интервале dv, которые подлетают к отверстию в единицу времени, равно $(\rho/m)SvNdv$. Каждая молекула уносит импульс mv, то есть сила (унос импульса в единицу времени) равна

$$\int_0^\infty dv\, S\rho v^2\, N = S\rho \frac{2k_B T}{m}$$

Критерии оценивания

Приведено распределение Больцмана	8 баллов
Число молекул подлетающие к отверстию со скоростями в интервале dv	4 балла
Представлен интеграл для определения силы	4 балла
Получен ответ	4 балла

Задача 3

Магнит малого размера массы m с магнитным дипольным моментом M парит над сверхпроводящей плоскостью. На какой высоте он будет парить? Какова будет его ориентация? Оцените периоды его колебаний в вертикальной плоскости и период вращений относительно равновесной ориентации.

Решение

Напряженность магнитного поля на поверхности сверхпроводника параллельна его поверхности. Поэтому поле сверхпроводника эквивалентно полю магнитного диполя, который расположен симметрично плоскости сверхпроводника относительно магнита и имеет ту же компоненту магнитного момента вдоль поверхности сверхпроводника и противоположную в перпендикулярном направлении. Поэтому энергия взаимодействия магнита со сверхпроводником записывается в виде

$$U = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi(2r)^3}\left(M_\parallel^2 + 2M_\perp^2\right).$$

Здесь $M_\parallel$ – компонента магнитного момента вдоль поверхности сверхпроводника, $M_\perp$ – компонента магнитного момента, перпендикулярная поверхности сверхпроводника, а r – расстояние от магнита до поверхности сверхпроводника. Дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ связан с тем, что производная $-\frac{dU}{dr}$ должна быть равна силе, действующей на магнит, которая определяется расстоянием $2r$ до магнитного диполя-отражения. Приведенная энергия достигает минимума при $M_\perp = 0$, то есть магнитный момент магнита в равновесии направлен параллельно поверхности сверхпроводника. При этом сила $F = -\frac{dU}{dr}$, действующая на магнит, равна

$$F = \frac{3\,\mu_0 M^2}{4\pi(2r)^4}$$

Чтобы найти r, эту силу надо приравнять к весу магнита mg. Направление намагниченности может свободно вращаться в плоскости, параллельной поверхности сверхпроводника. Частота колебаний ω_1 связанная с отклонением направления магнитного момента $\boldsymbol{M}$ от этой плоскости, определяется отношением $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ (где θ – угол отклонения от плоскости) к моменту инерции магнита I. В результате находим оценку $\omega_1^2 \sim \mu_0 M^2/(Ir^3)$. Что же касается частоты вертикальных колебаний магнита ω_2, то она определяется отношением коэффициента упругости $\frac{d^2U}{dr^2}$ к массе магнита m. В результате находим оценку $\omega_2^2 \sim \mu_0 M^2/(mr^5) \sim g/r$., где $g -$ ускорение свободного падения.

Критерии оценивания

Приведена энергия взаимодействия магнита со сверхпроводником	3 баллов
Условие достижения минимума энергии	3 балла
Определена сила действующая на магнит	3 балла
Определена частота колебаний ω_1	4 балла
Определена частота колебаний ω_2	4 балла
Получен ответ	3 балла

Задача 4

Частица массы m находится в основном состоянии в поле с одномерным потенциалом $U = m\omega^2 x^2/2$. В момент времени $t=0$ частице придан импульс p. Найти вероятность того, что частица останется в основном состоянии.

Решение

Волновая функция основного состояния осциллятора имеет вид

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right).$$

После придания частице импульса p волновая функция становится равной

$$\Psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + i\frac{px}{\hbar}\right)$$

Проекция нового состояния на основное равно

$$\int dx\, \Psi_1 \Psi_0 = \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}\right).$$

Вероятность остаться в основном состоянии равна квадрату этого выражения.

Критерии оценивания

Приведено уравнение Шредингера	5 баллов
Получена волновая функция основного состояния	5 баллов
Получена волновая функция состояния, после придание частницы импульса p	5 баллов
Получен ответ	5 баллов

Задача 5

Электрон находится в поле слабо неоднородной линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме. Какая средняя (по периоду волны) сила будет на него действовать?

Решение

Уравнение движения электрона в поле электромагнитной волны имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t)$$

Его смещение

$$\boldsymbol{x} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t)$$

Энергия же электрона

$$U = -e\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \frac{e^2}{m} E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

Усредняя эту энергию по периоду, находим

$$\overline{U} = -\frac{e^2}{2m} E_0^2$$

Таким образом, энергия электрона тем выше, чем больше амплитуда электромагнитного поля. Поэтому он будет двигаться в сторону ее уменьшения. Соответствующую среднюю силу можно найти, как градиент $\overline{U}$.

Критерии оценивания

Приведено уравнение движения	4 балла
Уравнение для определения положения электрона	4 балла
Получена энергия электрона	4 балла
Средняя энергия электрона по периоду	4 балла
Получен ответ	4 балла