Профиль: «Теория игр» **КОД - 390**

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи.
Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

1. (10 баллов) «Стоит ли смешивать компании?»
Пусть у каждой женщины и у каждого мужчины заданы строгие предпочтения на множестве партнеров противоположного пола. Дан граф знакомств. Знакомые мужчины и женщины разбиваются на пары так что итоговое разбиение устойчиво, то есть в нем нет таких знакомых мужчины и женщины, которые сейчас не в паре, но предпочитают друг друга своим текущим партнерам или же одиноки.
Предположим, что совпадают предпочтения как всех мужчин, так и всех женщин. Перед тем как все разобьются на пары, Алиса думает познакомить ли ей своих знакомых – Бориса и Вику. Бывает ли так, что

(a) **(5 баллов)** Алиса окажется с менее предпочтительным мужчиной, познакомив Б и В?
(b) **(5 баллов)** Алисе выгодно познакомить Б и В?

(10 points) “Should one combine the parties?”
Let every woman and every man have strict preferences on a set of partners of the opposite sex. An acquaintance graph is given. Men and women who know each other form pairs and the final partition is stable: no unmatched man and woman knowing each other prefer being together to their current partners or are lonely.

Suppose that the preferences of both all men and all women coincide. Before the matching starts, Alice is thinking to introduce her friends Boris and Victoria to each other. Is it possible that

(a) **(5 points)** the situation becomes worse for Alice if she introduces B and V to each other?

(b) **(5 points)** it is profitable for Alice to introduce B and V to each other?

РЕШЕНИЕ:

Можно построить много разных примеров. Например, такие:

1) Идея: Если Вика более популярна среди мужчин, чем Алиса, а текущий Алисин партнер, Борис, более популярен среди женщин чем любой из знакомых Вики => Алисе не стоит знакомить Вику с Борисом.

действующие лица: Алиса, Вика, Борис, Григорий

предпочтения мужчин: В>А

женщин: Б>Г

граф знакомств: Алиса знакома со всеми, Вика знакома с Григорием (и Алисой)

стабильный мэтчинг: В-Г, А-Б

если Алиса познакомит В и Б, то будет другой стабильный мэтчинг:

В-Б, А-Г

То есть Алисе не стоит знакомить Вику с Борисом.

2) Идея: Непопулярная Алиса в паре с непопулярным Денисом. Она хотела бы быть вместе с Григорием, но тот в паре с самой популярной из женщин --- Викой. У Алисы есть знакомый Борис --- самый популярный из мужчин, однако он не знаком с Викой. Если познакомить Бориса с Викой, то Григорий "освободится" и, если у него нет лучших опций, образует пару с хитрой Алисой.

действующие лица: Алиса, Вика, Елена, Борис, Григорий, Денис

предпочтения мужчин: В>Е>А

женщин: Б>Г>Д

граф знакомств: Алиса знакома со всеми, Вика знакома только с Григорием (и Алисой), Елена знакома с Борисом и Денисом.

стабильный мэтчинг: В-Г, Е-Б, А-Д

если Алиса познакомит В и Б, то будет другой стабильный мэтчинг:

В-Б, Е-Д, А-Г

То есть Алисе выгодно познакомить Вику с Борисом.

Замечание:

Мы неявно используем единственность стабильного мэтчинга в этих примерах. Единственность --- следствие общего феномена: если совпадают предпочтения хотя бы одной стороны рынка (например, мужчин), то стабильный мэтчинг единственен и может быть построен при помощи следующей процедуры. Самая популярная женщина образует пару с наиболее предпочтительным из своих знакомых, образованная пара уходит, процедура повторяется. Легко проверить, что эта процедура ведет к стабильному мэтчингу и показать, что в любом другом мэтчинге найдется блокирующая пара, т.е. построенный мэтчинг --- единственный стабильный.

Критерии:

1 балл ставился, если нарушены предпосылки условия, но затрачено существенное время на решение (типичны два нарушения: разные предпочтения у разных мужчин, или динамическое изменение предпочтений после знакомства).

2, 3 балла ставились, если есть нестрого сформулированная идея решения одного из пунктов

5 баллов ставились, если решена половина (один пункт)

10 баллов - решены оба пункта

2. (X+Y баллов) «Вдали от обезумевшей толпы»

(a) **(X баллов)** Напишите целое число X от 1 до 10. Те, кто написал самое редкое число (среди всех других участников олимпиады по профилю «Теория игр» этого года), получают указанное ими количество баллов.

(b) **(Y баллов)** Задача та же – написать число Y, но на этот раз выигрывают те, кто угадал второе по частоте число.

(X+Y points) “Far from the mad crowd”

(a) **(X points)** Write an integer number X from 1 to 10. Those who wrote the most rarely number (among the works of all other participants of the Game Theory Olympiad of this year) will receive the X number of points.

(b) **(Y points)** The task is the similar, i.e. to write an integer number Y from 1 to 10, but now the winners are those whose number is the second popular among others.

РЕШЕНИЕ

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	кол-во работ с этим числом	2	4	6	2	1	5	5	7	3	10
b)	кол-во работ с этим числом	2	2	3	5	0	7	9	7	1	9

В пункте (а) требовалось выбрать самое редкое число. Это оказалось 5, встречается в 1 работе. Этот участник получил 5 баллов.
В пункте (b) требовалось указать второе по частоте число. Самыми частыми оказались 7 и 10, вторые по частоте - 6 и 8. Все участники, указавшие 6 и 8 получили соответсвующее своим заявкам число баллов.

Идея этой задачи сводится к тому, чтобы разумно оценить “глубину рациональности” оппонентов по игре. При этом, поскольку выигрыш зависит от числа, с которым участник выиграл, здесь также сильна тенденция к называнию больших цифр. Идея подбора числа основывается на концепции k-level rationality. Многочисленные эксперименты показывают, что при распределении частот в популяции наибольшая частота встречается у глубины подсчета 2 и 3. Поскольку участники олимпиады, очевидно, в среднем более рациональны чем случайная выборка респондентов, в пункте (а) наблюдался минимум в 5. Разброс результатов в пункте (b), вероятно, мог быть связан с тем, что участники с некоторым уровнем глубины подсчета выбирали как большее, так и меньшее число по отношению к предыдущему.

Подробнее о распределениях уровней рациональности можно прочитать здесь: https://www.wzb.eu/system/files/docs/ende/wett/igtr-2017-07-12.pdf

3. (25 баллов) «Судью на мыло!»
Перед началом матча Зенит-Спартак выяснилось, что на стадионе не хватает штанг у ворот. Судья всё же решил проводить матч по таким правилам: он произвольно (независимо с равномерным распределением) выбирает две точки $X<Y$ на отрезке $[0,40]$, и разрешает Зениту установить в эти точки штанги ворот: обычную и невидимую. Зенит решает, в какую из точек поставить каждую штангу. Спартак видит, что видимую штангу установили в точку Z, но не знает левая это штанга ($Z=X$) или правая ($Z=Y$).

(a) **(10 баллов)** Предположим, Зенит выбрал точку случайным образом, X или Y с вероятностью 1/2. На последней минуте матча Спартак готов нанести свой первый удар по "воротам" Зенита, "ворота" пустые. Куда следует бить, чтобы максимизировать вероятность гола?

(b) **(15 баллов)** Решите игру. В какую точку – X или Y – должен был установить видимую штангу Зенит, чтобы минимизировать вероятность гола при оптимальной игре Спартака?

(25 points) "The ref needs specs!"
Before the match between Zenit and Spartak starts, it was found out that the stadium did not have enough goalposts at the gate. Nevertheless, the referee decided to play the match according to the following rules: he arbitrarily (independently with a uniform distribution) selects two points X<Y on the interval [0.40], and allows Zenit to set the goalposts at these points, one is normal and one is invisible. Zenit decides at which point to put each goalpost. Spartak sees that the visible goalpost has been set to point Z, but does not know if it is the left one (Z = X) or the right one (Z = Y).

(a) **(10 points)** Assume that Zenit chose the point randomly, i.e. X or Y with equal probabilities 1/2. In the last minute of the match, Spartak is ready to strike his first shot at the "goal" of Zenit, the "goal" is empty. Where to beat to maximize the probability of a goal?

(b) **(15 points)** Solve the game. At what point, X or Y, should Zenit put the visible goalpost in order to minimize the probability of a goal under the optimal Spartak behavior?

РЕШЕНИЕ
(a) 1. Оптимально бить впритирку со штангой (на расстоянии эпсилон, если радиус мяча эпсилон). Почему так? Есть два состояния мира: штанга левая (Z=X) или правая (Z=Y). Если штанга левая, то надо бить чуть правее, но не слишком, чтобы не ударить правее скрытой штанги Y. Аналогично, если штанга правая, то надо бить чуть левее, но не слишком, чтобы не ударить левее скрытой штанги X.

2. Оптимально бить со стороны центра: чуть правее штанги, когда она в левой половине, и чуть левее штанги, когда она в правой половине. Почему так? Зенит выбрал штангу наугад. Известно, что X<Y, поэтому штанга в левой половине (Z<1/2) вероятнее является левой, чем правой, а штанга в правой половине (Z>1/2) вероятнее является правой, чем левой.

(b) Зенит будет выбирать штангу ближе к середине. Почему так?

Сначала заметим, что оптимальным ответом Зенита на стратегию Спартака из пункта а. будет как раз такая стратегия.

Есть три состояния: X<Y<1/2, X<1/2<Y, 1/2<X<Y. Вероятности состояний такие: Pr(X<Y<1/2) = 1/4; Pr(1/2<X<Y) = 1/4; Pr(X<1/2<Y) = 1/2.

В первом и во втором такая стратегия даёт Зениту выигрыш: Спартак бьёт мимо. В третьем состоянии Спартак всегда попадает. По формуле вероятности состояний в среднем будет получаться ничья.

Стратегия Спартака остаётся наилучшим ответом на такую стратегию Зенита. Если Спартак отклонится -- с вероятностью p будет бить не ближе к центру, а дальше от центра

-- то он будет выигрывать 1/2p и проигрывать 1/2p, то есть останется безразличен. Так что мы нашли равновесие. Единственно ли оно?

Единственность. Заметим, что для любого такого p>0 Зениту выгодно отклониться и всегда выбирать дальнюю от центра штангу. В этом случае Зенит выигрывает всегда, когда Спартак бьёт дальше от центра, это уже вероятность p. Когда же Спартак бьёт ближе к центру (1-p), в половине случаев он забивает, в половине бьёт мимо. Теперь Спартак проигрывает. Поэтому Спартак играет p=0, равновесие единственно.

Критерии:

(a) Здесь мы пользуемся равномерностью распределения. Если нет обоснования, а угадан ответ ставим 2 балла из 10. Если не хватает (1) или (2) составляющей ответа, то за каждую снимаем 4 баллла. По мелким недочетам снимаем 1-2 балла.

(b) Если не показали единственность — минус 2 балла.Если только угадали ответ — всего ставим 2 балла. Если не указали, как выглядит оптимальная стратегия Спартака на стратегию Зенита — минус 5 балла. Если при доказательстве этого факта проверяли только отклонение в чистых стратегиях — минус 1 балл.

За логические ошибки снимаем по 1-2 балла за каждую в зависимости от степени тяжести.

4. (15 баллов) «Покупай!»

У продавца есть два товара: пылесос и утюг. Ценность каждого из этих товаров для покупателя, V_1 и V_2, соответственно, а обоих вместе – V_1+V_2. Продавец не знает точно ценности покупателя, но считает, что они равномерно распределены на [0,1000], независимо друг от друга. Полезность покупателя равна ценности приобретенных товаров за вычетом цен.

(a) **(5 баллов)** Продавец выбирает из двух стратегий продаж. Продавец может назначить цену для каждого из товаров по отдельности, и в этом случае покупатель купит те товары, ценность которых для него будет выше цены. Или же, продавец может продавать товары только вместе, единым пакетом. В этом случае покупатель купит оба товара, если сумма ценностей превысит цену пары. Какие оптимальные цены предложит продавец в каждом случае, и какой ожидаемый доход получит? Какая схема продажи для него оптимальнее, по отдельности или вместе?

(b) **(10 баллов)** Предположим теперь, что продавец может предложить меню из трех возможностей: купить каждый товар по отдельности за свою цену или пакетом. Какие цены предложит продавец, и какой будет его ожидаемый доход?

(15 points) “Buy it!”

A seller has two goods for sale: a vacuum cleaner and an iron. A buyer has a value $V_1$and $V_2$for each good separately, and so a value of V_1+V_2 for both. The seller does not know the buyer's value exactly, he thinks that the values are uniformly distributed on [0,1000], independently from each other. The buyer's utility equals the values of the goods he buys minus their prices.

(a) **(5 points)** The seller chooses between two mechanisms of sales. The seller can set prices for each good separately, in which case the buyer would buy only the goods with value exceeding the price. Or, the seller can sell the goods only as a bundle. In this case the buyer would purchase both goods when the sum of their values exceeds the price of the bundle. What are the seller's optimal prices and expected revenues in each case? Which scheme would the seller prefer, selling the goods individually or as a bundle?

(b) **(10 points)** Suppose now that the seller can offer a menu of three options: buying each good separately or both goods as a bundle. Which prices should the seller offer? How much expected revenue he would be able to obtain?

РЕШЕНИЕ

См. последние страницы файла (ввиду обилия формул пришлось часть решений добавить сгенерированными в формате latex).

Критерии:

4а) 2 балла - за корректно решение ситуации продажи товаров отдельно и расчета цены и прибыли, верный ответ без пояснений к решению оценивается в 0 баллов

2 балла - за корректно решение ситуации продажи товаров комплектом (рассмотрена как цена на комплект меньше или равно 1000, так и цена на комплект больше 1000)

1 балл - общий вывод по задаче по поиску оптимальной схемы выставления цен для продавцов

4б) 2 балла - за формализацию задачи относительно цен и полезностей, при которых будет куплен 1-ый товар или 2-ой или комплект

4 балла - запись целевой функции задачи

4 балла - поиск оптимальных цен сформулированной задачи

5. (18 баллов) «Проблема этикета»

Альбус Дамблдор (игрок 1), Северус Снегг (игрок 2) и Гарри Поттер (игрок 3) сидят за столом на торжественном ужине. Им приносят блюдо из рыбы и экзотическую вилку, с помощью которой эту рыбу следует есть. Проблема в том, что все трое не помнят, в какой руке надо держать вилку; изначально известно, возможно два состояния мира: $w=R$ (то есть вилку надо держать в правой руке) и $w=L$ (то есть вилку надо держать в левой руке). При этом априорная вероятность того, что $w=R$, равна $p\geq 1/2$.

Вдобавок, каждый игрок $i=1,2,3$ обладает частной информацией $s_i \in \{L,R\}$, которая верна с вероятностью $q>1/2$, причем

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

То есть если вилку действительно надо держать в правой руке, то $s_i=R$ с вероятностью q и $s_i=L$ с вероятностью $1-q$. При заданном w случайные величины s_i статистически независимы.

(a) **(3 баллов)** Пусть игроки берут в руки вилки в такой очередности: сначала Дамблдор выбирает $a_1 \in \{L,R\}$, потом Снегг выбирает a_2, потом Поттер выбирает a_3. Каждый игрок хочет одного: не ошибиться, какой рукой взять вилку – в таком случае он получает выигрыш, равный 1 (и выигрыш, равный 0 в противоположном случае). Найдите, как выбор Снегга будет зависеть от s_2 и a_1.

(b) **(5 баллов)** Найдите, как выбор Поттера будет зависеть от a_1, a_2 и s_3.

(c) **(10 баллов)** Пусть за столом сидит N человек. При каких условиях происходит *информационный каскад*: если $s_1=R$, то в равновесии $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$, вне зависимости от сигналов $s_2,\ldots,s_N$?

(18 points) “Etiquette problem”

Albus Dumbledore (Player 1), Severus Snape (Player 2) and Harry Potter (Player 3) are seated at a gala dinner table. They are brought a fish dish and an exotic fork, with which this fish should be eaten. The problem is that all three do not remember which hand to hold the fork; initially it is known that there are two possible states of the world: $w=R$ (that is, the fork must be held in the right hand) and $w=L$ (that is, the fork must be held in the left hand). Moreover, the a priori probability that $w=R$ is $p\geq 1/2$.

In addition, each player $i=1,2,3$ has private information $s_i \in \{L,R\}$, which is true with probability $q>1/2$, and

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

This means that, if the fork really needs to be held in the right hand, then $s_i=R$ with probability q and $s_i=L$ with probability $1-q$. For a given w, random variables s_i are statistically independent.

(a) **(3 points)** Let the players take the forks in this order: first, Dumbledore chooses $a_1 \in \{L,R\}$, then Snape chooses a_2, then Potter chooses a_3. Each player wants not to be mistaken with which hand to take the fork, in this case he receives a win equal to 1 (and a win equal to 0 in the opposite case). Find how Snape's choice will depend on s_2 and a_1.

(b) **(5 points)** Find how Potter’s choice will depend on a_1, a_2 and s_3.

(c) **(10 points)** Let N people sit at the table. Under which conditions does an *information cascade* occur: if $s_1=R$ then, in equilibrium, $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$ regardless of signals $s_2,\ldots,s_N$?

РЕШЕНИЕ

См. последние страницы файла (ввиду обилия формул пришлось часть решений добавить сгенерированными в формате latex).

Критерии:

а) и б) ставилось 2 балла за полный ответ, где не было ничего лишнего. (Полностью правильный ответ не получается с неправильными логиками, как участники пытались решать еще)

а) и б) остальные баллы ставились за полное и правильное описание самого решения (расчет вероятностей и т.д.)

в) 1 балл ставился за ответ в случае если все получают сигнал "правой", но без обоснований. А дальше вообще никто не решил.

6. (22 балла) «Хитрые уступки»

Ася и Боря собираются играть в следующую игру. Фишка стоит в корне бинарного дерева глубины n, все ребра которого ориентированы от корня к листьям. В каждом листе случайно и независимо написана буква «А» с вероятностью p или «Б» с вероятностью $1–p$. Ребята по очереди совершают ходы, перемещая фишку вдоль ребра из вершины в соседнюю с ней. Через n ходов фишка достигает листа. Если на нем буква «А», то выигрывает Ася, если «Б», то Боря.

Боря – настоящий джентльмен. Он предлагает отдать Асе первый ход и даже вероятность сделать в Асину пользу: $p = 4/7$.

(a) **(10 баллов)** В предположении, что $n=2k$ велико, посоветуйте Асе, стоит ли ей соглашаться на такие щедрые уступки? Ответ обоснуйте.

(b) **(10 баллов + 2 балла)** Найдите такое p, что даже при большом $n=2k$ у обоих ребят шанс выиграть хотя бы 10%. Бонус **(+2 балла)** тем, кто напишет чем еще примечательно это число.

(22 points) "Tricky concessions"

Asya and Boris are going to play the following game. The chip is at the root of a binary tree of depth n, all edges of which are oriented from the root to the leaves. The letter "A" with probability p or "B" with probability $1 – p$ is randomly and independently written on each leaf. The players take turns moving the chip along the edge from the vertex to the neighboring one. After n moves, the chip reaches the leaf. If the letter "A" is on it, then Asya wins, if "B", then Boris.

Boris is a real gentleman. He offers to give Asa the first move and even the to make the probability in favor of Asya: $p = 4/7$.

(a) **(10 points)** Under the assumption that $n=2k$ is large, advise Asya whether she should agree to such generous concessions? Explain the answer.

(b) **(10 points + 2 points)** Find a p such that even for large $n = 2k$, both players have at least 10% chances to win. We will give a bonus **(+2 points)** to those who write what else is remarkable with this number p.

РЕШЕНИЕ

См. последние страницы файла (ввиду обилия формул пришлось часть решений добавить сгенерированными в формате latex).

Критерии:

(а) - ставили 2 балла за ответ с каким-то рассуждением, в основном были словесные, 4 балла - если была попытка доказать в цифрах, 10 - если нормальное доказательство.

(б) - либо участники решали правильно, либо рассуждение было абсолютно неверным, поэтому там либо 10, либо 0, ну и бонус у кого-то в 2 балла за золотое сечение.

ЗАДАЧА 4. РЕШЕНИЕ.

(а) Сначала рассмотрим вариант с отдельной ценой для каждого товара. Если продавец назначает цену $P \geq 1000$, то он продаст товар, если его ценность $V \geq P$, вероятность чего (спрос) равна $(1000 - P)/1000$. Решаем

$$\frac{P(1000 - P)}{1000} \mapsto \max .$$

Получаем условие первого порядка (умножив на 1000)

$$1000 - 2P = 0,$$

а значит $P^* = 500$ для каждого товара, вероятность продажи каждого товара $\frac{1}{2}$ и общая прибыль 500.

Точно также, если продавать товары вместе, то при цене P_{12} вероятность продажи равна вероятности того, что $V_1 + V_2 \geq P_{12}$. Для $P_{12} < 1000$ она равна $1 - p^2/2$, где $p = P_{12}/1000$ (см. Рис. 1а)). (Площадь квадрата ценностей минус площадь треугольника с нулевым спросом.) Получаем задачу

$$1000p(1 - p^2/2) \mapsto \max,$$

условие первого порядка (без 1000)

$$1 - \frac{3}{2}p^2 = 0,$$

значит $p^* = \sqrt{\frac{2}{3}}$ или $P_{12}^* \approx 816,5$, а вероятность продажи $\frac{2}{3}$ с общей прибылью $544,3$. А значит, при данных условиях задачи, продавать оба товара вместе лучше, чем по отдельности. Возможный случай $P_{12} > 1000$ рассматривается аналогично (со слегка другой формулой вероятности, соответствующей треугольнику спроса), там локальный максимум достигается при $p = 1$, а значит глобальный максимум $P_{12}^* \approx 816,5$.

(б) Итак, продавец теперь может установить меню из цены за два товара сразу, P_{12}, и цен на отдельные товары P_1 и P_2. Если $P_1 + P_2 < P_{12}$ все покупатели будут покупать товары по отдельности (даже если купят два), и такая ситуация эквивалентна той, в которой предлагаются товары только по отдельности. Точно также, если $P_i > P_{12}$, то никто не будет покупать товар i отдельно. Все эти случаи уже рассмотрены в предыдущем пункте.

На Рис. 1б) представлены возможные цены и соответствующие им спросы на товары в нетривиальном случае. В частности, область спроса

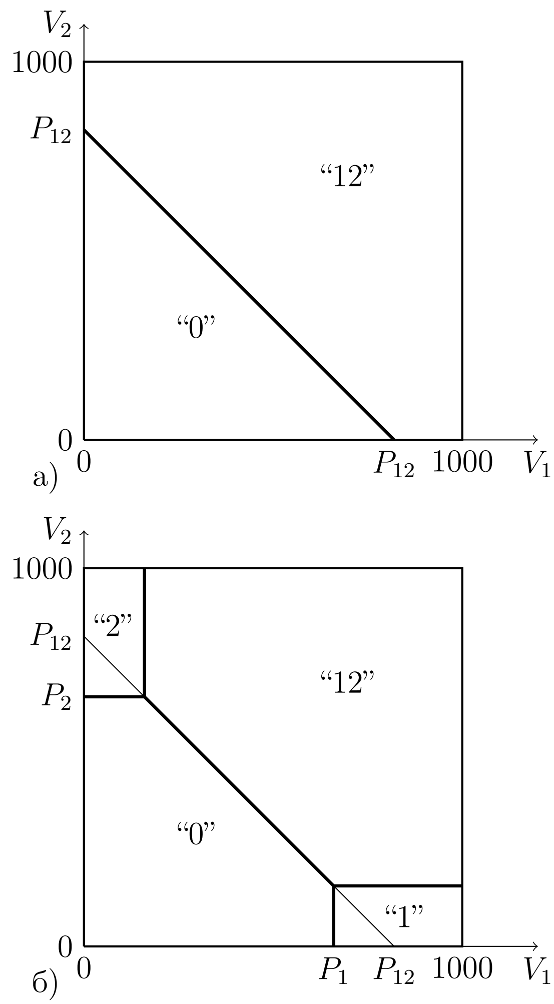

Рис. 1: Квадрат ценностей

“1”, в которой покупатель покупает товар 1 по цене P_1 характеризуется условиями $V_1 \geq P_1$ и $V_1 - P_1 \geq V_1 + V_2 - P_{12}$. Второе условие может быть переписано как $V_2 \geq P_{12} - P_1$. Вместе эти условия и дают прямоугольную область.

Определим оптимальное P_i при фиксированной P_{12} (без потери общности общую задачу оптимизации можно решить последовательно, определив оптимальные цены на индивидуальные товары при фиксированной P_{12}, а затем оптимизируя по P_{12} с учётом $P_i^*(P_{12})$). Для этого достаточно рассмотреть каждый из товаров по-отдельности. Все дополнительные эффекты на прибыль от введения цены на товар i по сравнению со случаем только цены на оба товара сразу сосредоточены в соответствующем прямоугольнике спроса на товар i. Учитывая симметрию задачи, индекс i можно опустить. Итак, при введении цены P мы получаем, что вероятность того, что пользователь купит только этот товар по цене P (вероятность прямоугольника) равна $(p_{12} - p)(1 - p)$, где $p = P/1000$, а $p_{12} = P_{12}/1000$. А без введения цены, для этих же типов пользователей (внутри прямоугольника, но без треугольника), вероятность покупки обоих товаров сразу по цене P_{12} равна $(p_{12} - p)(1 - p) - (p_{12} - p)^2/2$. Значит, обозначив $q = p_{12} - p$, общая дополнительная прибыль деленная на 1000 равна:

$$q(1-p)p - (q(1-p) - q^2/2)p_{12} = -q^2(1-p) + q^2/2p_{12}.$$

Дифференцируя по p, получаем условие первого порядка

$$q^2 + 2q(1-p) - qp_{12} = 0.$$

Разделив на q, получаем $q + 2 - 2p - p_{12} = 2 - 3p = 0$, а значит $p^* = 2/3$ или же $P^* \approx 666,7$ (не зависит от P_{12}).

Теперь осталось найти оптимальную P_{12}. Вероятность покупки двух товаров сразу равна (площади квадрата минус площадь треугольника, как в пункте (a), минус площадь двух прямоугольников, плюс площадь двух маленьких треугольников, которые вычли в прямоугольниках), учитывая $p = \frac{2}{3}$,

$$1 - \frac{p_{12}^2}{2} - 2\frac{1}{3}\left(p_{12} - \frac{2}{3}\right) + \left(p_{12} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{p_{12}^2}{2} - 2p_{12} + \frac{17}{9}.$$

Общая прибыль (деленная на 1000) равна

$$\left(\frac{p_{12}^2}{2} - 2p_{12} + \frac{17}{9}\right)p_{12} + 2\frac{1}{3}\left(p_{12} - \frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} = \frac{p_{12}^3}{2} - 2p_{12}^2 + \frac{7}{3}p_{12} - \frac{8}{27}.$$

Максимизация данного выражения по p_{12} дает условие первого порядка (деленное на 3/2) $p_{12}^2 - \frac{8}{3}p_{12} + \frac{14}{9} = 0$. Откуда $p_{12}^* = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, что даёт $P_{12}^* \approx 861.9$, и общую прибыль в $549, 2$.

ЗАДАЧА 5. РЕШЕНИЕ.

Найдем сначала равновесное действие Дамблдора, в зависимости от его сигнала s_1. Мы имеем

$$P(w = L|L) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)}.$$

Эта величина превышает $\frac{1}{2}$, так как, по условию задачи, $q > p$. Также

$$P(w = L|R) = \frac{(1-p)(1-q)}{pq + (1-p)(1-q)} < \frac{1}{2},$$

ибо $p \geq \frac{1}{2}$ и $q > \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_1^* = s_1$, то есть Дамблдор всегда возьмет вилку в ту руку, которую считает правильной.

Теперь рассмотрим оптимальное действие Снегга, в зависимости от действия Дамблдора $s_1 = s_1$ и его сигнала s_2. Мы имеем

$$P(w = L|LL) = \frac{(1-p)q^2}{(1-p)q^2 + p(1-q)^2}.$$

Эта величина превышает $\frac{1}{2}$, так как $\frac{q}{1-q} > \frac{p}{1-p} \geq \sqrt{\frac{p}{1-p}}$. Также верно, что

$$P(w = L|LR) = P(w = L|RL) = \frac{(1-p)q(1-q)}{(1-p)q(1-q) + pq(1-q)} < \frac{1}{2}$$

и

$$P(w = L|RR) = \frac{(1-p)(1-q)^2}{pq^2 + (1-p)(1-q)^2} < \frac{1}{2},$$

так как $p \geq \frac{1}{2}$ и $q > \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_2^* = L$ если $a_1 = s_2 = L$ и $a_2^* = R$ в любом другом случае.

Наконец, найдем действие Гарри Поттера в зависимости от его частной информации и действий двух первых игроков. В равновесии возможно только $(a_1, a_2) = (R, R)$, $(a_1, a_2) = (L, R)$ либо $(a_1, a_2) = (L, L)$.

Если Дамблдор берет вилку в правую руку, то действие Снегга не даст Поттеру никакой новой информации — поскольку Снегг (вне зависимости от его частной информации) также возьмет вилку в правую руку. Однако это означает, что и Поттер выберет $a_3 = R$ если $a_1 = R$, вне зависимости от s_3. Действительно,

$$P(w = L|RRL) = \frac{(1-p)q(1-q)}{(1-p)q(1-q) + pq(1-q)} < \frac{1}{2}$$

и
$$P(w=L|RRR) = \frac{(1-p)(1-q)^2}{pq^2+(1-p)(1-q)^2} < \frac{1}{2}.$$
Если $(a_1, a_2) = (L, L)$, то выбор Гарри также не будет зависеть от s_3, так как
$$P(w=L|LLL) = \frac{pq^3}{pq^3+(1-p)(1-q)^3} > \frac{1}{2}$$
и
$$P(w=L|LLR) = \frac{pq^2(1-q)}{pq^2(1-q)+(1-p)q(1-q)^2} = \frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)} > \frac{1}{2}.$$
Наконец, если $(a_1, a_2) = (L, R)$, то
$$P(w=L|LRR) = \frac{pq(1-q)^2}{pq(1-q)^2+(1-p)q^2(1-q)} < \frac{1}{2}$$
и
$$P(w=L|LRL) = \frac{pq^2(1-q)}{pq^2(1-q)+(1-p)q(1-q)^2} > \frac{1}{2}.$$
Получается, что для Гарри Поттера выбор определяется его собственным сигналом только в том случае, когда $(a_1, a_2) = (L, R)$; в противном случае, Поттер игнорирует s_3, выбирая $a_3 = a_1$.

Можно показать, что при произвольном числе игроков равновесная последовательность действий $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ будет зависеть от сигналов $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$ следующим образом:

1. Если $s_1 = R$, то $a_i = R$ для всех $i = a, \ldots, N$
2. Пусть $s_1 = L$ и $1 < h \leq N$ таково, что для всех $i \leq h$, $s_i \neq s_{i-1}$. Тогда $a_h = s_h$.
3. Пусть $s_1 = L$ и $1 < h \leq N$ таково, что для всех $i \leq h$, $s_i \neq s_{i-1}$, и $s_{i+1} = s_i$. Тогда $a_j = s_h$ для всех $j \geq h$.

Получается, что почти всегда у нас наступает *информационный каскад*: стоит только двум игроки подряд получить одинаковые сигналы относительно состояния мира, то все остальные игроки начинают копировать их поведение, игнорируя собственную частную информацию.

ЗАДАЧА 6. РЕШЕНИЕ.

Обозначим вероятность Асиного выигрыша за $v_n(p)$, когда она ходит первой. Эта функция удовлетворяет следующему соотношению

$$v_n(p) = 1 - (v_{n-1}(1-p))^2.$$

Действительно, Ася выигрывает во всех случаях кроме тех, когда в какую бы сторону (налево или направо) она не сдвинула фишку — в соответсвующем поддереве глубины $n-1$ выигрывает Боря. По предположению о независимости, вероятность Бориного выигрыша в обоих поддеревьях равна произведению вероятностей. Для поддерева глубины $n-1$, где первый шаг Борин, вероятность его выигрыша равна $v_{n-1}(1-p)$ — она совпадает с вероятностью выигрыша Аси в игре, где Ася ходит первой, но "А" и "Б" поменялись ролями или что тоже самое p поменялось на $1-p$.

Чтобы избавиться от $1-p$, применив эту формулу два раза и получим

$$v_n(p) = 1 - \Big(1 - (v_{n-2}(p))^2\Big)^2.$$

или

$$v_n(p) = F(v_{n-2}(p)), \qquad F(x) = 1 - (1-x^2)^2 = x^2(2-x^2).$$

Начальное условие $v_0(p) = p$.

Давайте оценим $v_{2k}(p_0)$, где $p_0 = \frac{4}{7}$ — предложение Бори. Для начала вычислим

$$v_2(p_0) = F(p_0) = \frac{16}{49} \cdot \frac{82}{49} = \frac{369}{625}.$$

Хм, кажется Боря не такой уж и джентельмен: $v_2(p_0) < p_0$! Наверное, если мы и дальше будем применять F, находя $v_4(p_0) = F(F(p_0))$, $v_6(p_0) = F(F(F(p_0)))$ и т.д., числа будут все убывать, и у Аси не останется шансов на победу: $v_{2k}(p_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Докажем эту гипотезу. Достаточно показать что $F(x) < \alpha \cdot x$ при $x \in [0, p_0]$ и некоторой константой $\alpha < 1$. Тогда $v_{2k}(p_0) \le \alpha^k \cdot p_0 \to 0$.

Такую альфу легко угадать. Мы уже знаем, что точка $(x, y) = (p_0, F(p_0))$ лежит под прямой $y = x$. Проверим, что график F лежит под отрезком соединяющим $(0,0) = (0, F(0))$ и $(p_0, F(p_0))$. Для этого достаточно установить, что F выпукла вниз. Находим вторую производную $F''(x) = 4 - 12 \cdot x^2$ и видим что она положительна при $0 \le x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, который включает интервал $[0, p_0]$. Следовательно,

$$F(x) \le \frac{F(p_0)}{p_0} \cdot x, \qquad 0 \le x \le p_0.$$

В итоге

$$v_{2k}(p_0) \le \left(\frac{F(p_0)}{p_0}\right)^k \cdot p_0 \to 0, \quad k \to \infty.$$

Не соглашайся, Ася!

Теперь решим второй пункт. Для этого найдем такое p, что вероятность Асиного выигрыша $v_{2k}(p)$ не зависит от k. Такое p — это корень уравнения

$$F(p) = p.$$

У этого уравнения есть два неинтересных корня, которые легко угадать $p = 0$ и $p = 1$ — действительно, в первом случае всегда выигрфвает Ася, во втором — всегда Боря. Деля многочлен $F(p) - p = p^2(2 - p^2) - p = -p(p^3 - 2p + 1)$ на $p(p-1)$, получаем уравнение на нетривиальные корни:

$$p^2 + p - 1 = 0.$$

Только один корень живет в интервале $[0, 1]$ — это **золотое сечение**

$$p = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Получаем $v_{2k}(p) = p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ для любого k. Так как $2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$, имеем $\frac{1}{2} < v_{2k}(p) < \frac{3}{4}$. То есть каждый из ребят выигрывает хотя бы с вероятностью $\frac{1}{4} = 25\% > 10\%$.