

Олимпиада студентов и выпускников "Высшая лига" 2021  
Методические рекомендации по направлению  
"Прикладная математика и информатика"

## 1 Формат олимпиады

В 2021 году олимпиада "Высшая лига" пройдет в два этапа. Первый этап (отборочный) представляет собой тест. По итогам первого отборочного этапа будет сформирован список участников второго заключительного этапа. На втором этапе вам будет предложен список задач, решение которых подразумевает предоставление связного математического текста. Подробнее о критериях оценивания задач 2-го этапа написано ниже.

## 2 Предварительные критерии оценивания задач 2-го этапа

По каждой задаче выставляется балл от 0 до 10.

**10** задача решена абсолютно верно.

**9** задача решена абсолютно верно, но имеются незначительные ошибки, не влияющие на ход решения и ответ.

**7-8** решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным.

**4-6** либо решена половина задачи, либо недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях).

**2-3** задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению.

**1** решение неверно.

**0** задача не решена.

- решение, т.е. любой текст, имеющий отношение к задаче, вплоть до ее номера отсутствует.

Уточненные критерии проверки по каждой задаче публикуются одновременно с началом периода подачи апелляции.

Решение задачи должно быть связным математическим текстом, не переходящим при этом в "сочинение по русскому языку."

В решении должны присутствовать ссылки на теоретические факты с указанием названий и формулировок теорем, которые применяются. Если утверждение, на которое ссылается абитуриент, не содержится в программе вступительных испытаний, комиссия вправе считать это недочетом решения.

Номер задания и ответ (если он требуется) должны четко выделяться на фоне остального текста.

При обнаружении двух незачеркнутых решений одной и той же задачи проверяются оба решения и выставляется минимальный балл.

## 3 Перечень и содержание тем для подготовки

### 3.1 Линейная алгебра

Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение.

Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по столбцу.

Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матриц.

Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.

Линейные преобразования векторных пространств и их матрицы. Изменение матрицы линейного преобразования и квадратичной формы при смене базиса.

Собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные и инвариантные подпространства.

Характеристический многочлен. Аннулирующий и минимальный многочлены. Теорема Гамильтона-Кэли.

Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Индексы инерции квадратичных форм.

### 3.2 Математический анализ

Числовые множества. Грани множеств. Множества в конечномерном действительном пространстве. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.

Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.

Функции одной переменной. Производные. Исследование свойств функций с помощью производных. Исследование и построение графика функции.

Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных. Задача на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Условия дополняющей нежёсткости.

Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа, ее стационарные точки. Метод множителей Лагранжа.

Неопределенный интеграл и его вычисление. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их вычисление.

Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.

### 3.3 Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие решения. Поле направлений. Изоклины. Интегральные кривые. Задачи Коши.

Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли и Риккати.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -о порядка.

Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.

Системы линейных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовый портрет. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

### 3.4 Дискретная математика

Множества и операции над ними. Алгебра множеств и ее законы. Преобразования формул алгебры множеств.

Основные правила комбинаторики. Правило подсчета количества комбинаторных объектов. Принцип Дирихле. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями. Формула включений и исключений.

Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, транзитивность, симметричность). Отношение эквивалентности. Отношение порядка. частичные, слабые и линейные порядки. Отношения предпочтения и функции полезности.

Алгебра логики. Функции алгебры логики. Нормальные формы-(С)ДНФ. (С)КНФ, полином Жегалкина. Исчисление высказываний, логика предикатов первого порядка.

Графы. Изоморфизм графов. Подграфы, цепи, циклы. Связность графов. Компоненты связности. Двудольные графы. Планарные графы. Критерии планарности. Деревья и их свойства. Остовные деревья. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Расстояние на графе. Диаметр, радиус и центры графа. Эйлеровы и гамильтоновы циклы.

### 3.5 Теория алгоритмов

Понятие алгоритма и сложности алгоритма. Тезис Чёрча. Машина Тьюринга. RAM-машина. Простые структуры данных: массив, список, стек, дек. Последовательный и бинарный поиск. Алгоритмы сортировки одномерного массива и оценка сложности. Способы задания графов. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Прима. Задача о максимальном потоке.

### 3.6 Теория вероятностей и математическая статистика

Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство, дискретное и непрерывное. Случайные события и случайные величины. Функция плотности

распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.

Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания и дисперсии. Условное математическое ожидание. Распределение дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, распределение Пуассона).

Нормальное и связанные с ним распределения, основные свойства.

Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции).

Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.

Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Уровень доверия и проверка значимости. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

## Список литературы

- [1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Учебник для вузов 4-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1999.
- [2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
- [3] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
- [4] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Лань, 2010.

### **Математический анализ**

- [5] Бесов О.В. Курс лекций по математическому анализу. Учебное пособие, Часть 1,2. М.: МФТИ, 2004.
- [6] Демидович Б.П. (РЕДАКТОР) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Издание 6-е, стереотипное. М.: Наука, 1968.
- [7] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Учебное пособие для вузов в 2-х т. М.: ВШ, 1970.
- [8] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учебник для вузов 7-е изд. М.: Физматлит, 2005.

- [9] Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления. т.1-3, 8-е изд. М.: Физматлит, 2003.

### **Дифференциальные уравнения**

- [10] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издание 4-е. М.: Наука, 1974.

- [11] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-Пресс, 1998.

#### **Дискретная математика**

- [12] АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., ХАБИНА Э.Л., ШВАРЦ Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. 2-е издание М.: Физматлит, 2014.
- [13] БЕРЖ К. Теория графов и ее применения. М.: ИЛ, 1962.
- [14] ВИЛЕНКИН Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
- [15] КУЗНЕЦОВ О.П. Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.
- [16] МАКАРОВ И.А., ТОКМАКОВА Л.Р. УМК Дискретная математика. Издательский дом НИУ ВШЭ, 2014.

#### **Теория алгоритмов**

- [17] АЛЕКСЕЕВ В., ТАЛАНОВ В. Графы и алгоритмы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.
- [18] КОРМЕН Т., ЛЕЙЗЕРСОН Ч., РИВЕСТ Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦН-МО, 2000.
- [19] ШЕНЬ А. Программирование: теоремы и задачи. М: МЦМНО, 2000.

#### **Теория вероятностей и математическая статистика**

- [20] БОРОВКОВ А.А. Теория вероятностей. Учебное пособие для вузов. 2-е издание. М.: Наука, 1986.
- [21] БОРОВКОВ А.А. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007.
- [22] ГНЕДЕНКО Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е издание. М.: ЕДИТОРИАЛ УРСС, 2005.
- [23] ИВЧЕНКО Г.И., МЕДВЕДЕВ Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: Издательство ЛКИ, 2010.
- [24] КРАМЕР Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
- [25] ШВЕДОВ А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. М.: ГУ ВШЭ, 2005.