Решения задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика"

Задача 1. *Назовем рогаткой объединение отрезка и двух лучей на плоскости, причём отрезок и оба луча имеют общий конец. Здесь лучи различны, отрезок не принадлежит ни одному из лучей. Назовем рогатки эквивалентными, если их можно совместить аффинным преобразованием плоскости. Опишите классы эквивалентности рогаток.*

Решение. Без ограничения общности можно считать, что общая точка лучей и отрезка находится в начале координат. Действительно, этого можно добиться параллельным переносом.

Таким образом, нам нужно рассмотреть классы эквивалентности рогаток с центром в нуле относительно невырожденных линейных преобразований вещественной плоскости. Зафиксируем в $\mathbb{R}^2$ стандартный базис $\{e_1, e_2\}$.

Возможны следующие два случая:

- лучи рогатки лежат на одной прямой;
- лучи рогатки не лежат на одной прямой.

Заметим, что рогатки первого из перечисленных типов эквивалентны друг другу и не эквивалентны никаким из рогаток второго типа. Действительно, так как, по условию задачи, отрезок не содержится ни в одном из лучей, любую такую рогатку линейным преобразованием можно совместить с рогаткой, лучи которой лежат на прямой, порожденной вектором e_1, а отрезок соединяет начало координат с точкой $(0, 1)$. Следовательно, все они эквивалентны. При этом никакую другую рогатку второго типа с данной «стандартной» рогаткой совместить нельзя, так как аффинные преобразования переводят прямые в прямые.

Теперь рассмотрим рогатку второго типа. Выберем произвольным образом направляющие векторы v_1, v_2 на её лучах. Так как лучи не лежат на одной прямой, векторы v_1, v_2 линейно независимы, а, значит, существует невырожденное линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее вектор v_1 в e_1, а вектор v_2 в e_2. Вектор w, соединяющий начало координат с другим концом отрезка, выражается в виде $\lambda v_1 + \mu v_2$, причем коэффициенты λ и μ не равны 0 одновременно. Его образ Aw, соответственно, записывается в виде $\lambda e_1 + \mu e_2$.

Таким образом, классификацию рогаток второго типа мы свели к классификации «стандартных» рогаток с центром в начале координат и лучами вдоль положительных направлений координатных осей. При этом, в зависимости от расположения вектора w, стандартные рогатки могут быть следующих типов:

1. $\lambda > 0, \mu > 0$ (вектор w лежит в первом квадранте плоскости);
2. $\lambda < 0, \mu > 0$ (вектор w лежит во втором квадранте плоскости);
3. $\lambda < 0, \mu < 0$ (вектор w лежит в третьем квадранте плоскости);

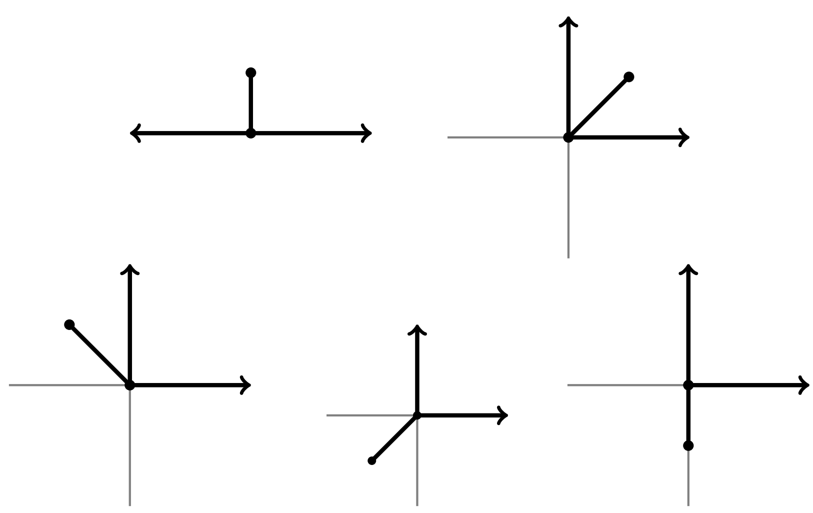
4. $\lambda > 0, \mu < 0$ (вектор w лежит в четвертом квадранте плоскости);
5. $\lambda < 0, \mu = 0$ (вектор w лежит на продолжении горизонтального луча);
6. $\lambda = 0, \mu < 0$ (вектор w лежит на продолжении вертикального луча).

Чтобы совместить одну стандартную рогатку с другой, мы можем использовать лишь те линейные преобразования, которые переводят лучи первой рогатки в лучи второй. Следовательно, мы можем лишь использовать преобразования, записывающиеся в базисе $\{e_1, e_2\}$ матрицами вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a > 0, b > 0$, (масштабирование осей) и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (отражение относительно диагонали, порожденной вектором $e_1 + e_2$).

Заметим, что масштабированием осей из любой стандартной рогатки каждого из типов 1–6 можно получить любую рогатку того же типа, но не можем получить никакую другую рогатку, так как коэффициенты масштабирования обязаны быть строго положительными.

Теперь посмотрим, какие из типов 1–6 можно совместить, если использовать отражение относительно диагонали. При данном отражении, первый и третий квадранты отображаются сами в себя, второй и четвертый квадранты переходят друг в друга, а горизонтальная и вертикальная координатные прямые меняются местами. Таким образом, две стандартные рогатки типов 1 и 3, соответственно, не эквивалентны друг другу и не эквивалентны рогаткам других типов. Две рогатки типов 2 и 4 эквивалентны друг другу, но не эквивалентны остальным. И, наконец, рогатки типов 5 и 6 эквивалентны друг другу и не эквивалентны другим.

Ответ: любая рогатка аффинно эквивалентна одной из следующих 5 рогаток.



□

Задача 2

Задача 2. *При каких натуральных n существует комплексная 4×4 матрица X такая, что*

$$X^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Для каждого такого n приведите пример такой матрицы.

Решение. Легко видеть, что $X^{2n} = 0$, то есть X – нильпотентна, значит, все собственные значения нулевые. Отсюда следует, что характеристический многочлен равен t^4. По теореме Гамильтона-Кэли $X^4 = 0$. Значит $n \geq 3$. Примеры для $n = 1$ – очевиден,

$$n = 2, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n = 3, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Задача 3

Задача 3. *Зафиксируем треугольник ABC площади 1, вершину A и сторону AB. Выберем случайно и независимо точку X на стороне AB и точку Y внутри треугольника ABC. Покажите, что математическое ожидание площади треугольника AXY не зависит от выбора исходного треугольника, и найдите его.*

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – площадь треугольника AXY. Любой треугольник площади 1 можно перевести в любой другой треугольник площади 1 аффинным преобразование. Более того, при аффинном преобразование сохраняется отношение площадей треугольников, следовательно, случайная величина ξ не зависит от выбора треугольника. Таким образом, мы можем выбрать любой конкретный треугольник площади 1, например, треугольник ABC с вершинами $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 1)$.

Пусть $(X_1, 0)$ – координата точки X, (X_2, Y_2) – координата точки Y. По условию задачи случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке длины 2, а случайный вектор (X_2, Y_2) распределён равномерно в треугольнике ABC. Легко видеть, что $\xi = \frac{1}{2}X_1 \cdot Y_2$. Так как случайные величины X_1 и Y_2 независимы, то

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}\mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}Y_2$$

Так как X_1 равномерно распределено на отрезке длины 2, то $\mathbb{E}X_1 = 1$.

Для подсчёта мат. ожидания Y_2 рассмотрим следующую задачу: чему равно мат. ожидание площади треугольника ABY? Обозначим через ξ_1 площадь ABY, через ξ_2 площадь AYC, через ξ_3 площадь BYC. Тогда $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$, значит

$$\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \mathbb{E}\xi_3 = 1.$$

Заметим, что ξ_1, ξ_2, ξ_3 – распределены одинаково. Например, можно перевести ABC аффинным преобразованием в равносторонний треугольник, а для равностороннего треугольника это очевидно. Следовательно, $\mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{3}$. С другой стороны, $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot Y_2$. Значит $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}Y_2 = \frac{1}{3}$. Отсюда получаем ответ $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{6}$.

$\square$

Задача 4

Задача 4. *Найдите предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Решение. Легко видеть, что интеграл исходный интеграл сходится. Пусть

$$y_n := \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)' = \frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(1+x^2)^n}$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(1+x^2)^n}\right) dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = 0$$

Получаем рекуррентное соотношение

$$\frac{2n}{\sqrt{n+1}} y_{n+1} - \frac{2n-1}{\sqrt{n}} y_n = 0$$

$$y_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n-1}{2n} y_n$$

Тогда

$$y_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)\cdot \ldots \cdot 1}{2n \cdot \ldots \cdot 2} y_1 = \sqrt{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} y_1 = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} y_1$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

По формуле Стирлинга, $(2n)! \sim 2\sqrt{\pi n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}$, $n! \cdot n! \sim 2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}$. Поэтому $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Легко видеть, что $y_1 = \pi$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\pi = \sqrt{\pi}.$$

□

Задача М1

Задача 5. *Для простого p обозначим через $\mathbb{F}_p$ поле из p элементов. Пусть $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ – неприводимый многочлен степени $n \geq 1$. Рассмотрим отображение*

$$\varphi : \mathbb{F}_p[x]/(q(x)) \to \mathbb{F}_p[x]/(q(x)), \quad [f(x)] \mapsto [f(x^p)] \ \forall f \in \mathbb{F}_p[x]$$

Докажите, что φ корректно определено, является линейным отображением векторных пространств над $\mathbb{F}_p$ и найдите его минимальный многочлен.

Решение. Сформулируем следующие факты, которые считаются известными.

Факт 1. *Пусть $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ – неприводимый многочлен степени $n \geq 1$. Тогда $\mathbb{F}_p[x]/(q(x)) \simeq \mathbb{F}_{p^n}$, где $\mathbb{F}_{p^n}$ – поле из p^n элементов.*

Факт 2. *Группа $\mathbb{F}_{p^n}^\times$ обратимых элементов поля $\mathbb{F}_{p^n}$ циклична. Следовательно, любой элемент $\mathbb{F}_{p^n}$ является корнем уравнения $y^{p^n} = y$.*

Факт 3. *Ненулевой многочлен степени k над полем может иметь не более k различных корней. В частности, если все элементы поля $\mathbb{F}_{p^n}$ – корни ненулевого многочлена степени k, то $k \geq p^n$.*

Для доказательства корректности заметим, что если $f, g \in \mathbb{F}_p[x]$, то $(f(x)+g(x))^p = f(x)^p + g(x)^p$. Это следует из обращения в ноль в характеристике p всех биномиальных коэффициентов, кроме нулевого и последнего. Отсюда и того, что $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$ следует, что для любого $f \in \mathbb{F}_p[x]$ $f(x^p) = f(x)^p$. Отсюда также следует корректность, так как $\varphi(q(x)) = q(x)^p$. Линейность очевидна из сказанного выше и факта, что $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$.

Остаётся заметить, что $\varphi^n = id$, что следует из Факта 1 и 2. Минимальность следует из Факта 3.

$\square$

Задача M2

Задача 6. *Для однородного многочлена второй степени $f \in \mathbb{R}[x, y, z, w]$ обозначим через $V(f) \subset \mathbb{RP}^3$ множество точек $(a : b : c : d)$ вещественного проективного пространства, таких, что $f(a, b, c, d) = 0$.*
А) *Верно ли, что если $V(f)$ гомеоморфно $V(g)$, то существует проективное преобразование пространства $\mathbb{RP}^3$, которое переводит одно из них в другое?*
Б) *Пусть пространства $\mathbb{RP}^3 \setminus V(f)$ и $\mathbb{RP}^3 \setminus V(g)$ имеют две компоненты связности. Верно ли, что дополнения $\mathbb{RP}^3 \setminus V(f)$ и $\mathbb{RP}^3 \setminus V(g)$ гомеоморфны?*

Решение. А) Докажем, что это верно, то есть как только пространства $V(f_i)$ гомеоморфны, существует проективное преобразование, переводящее $V(f_1)$ в $V(f_2)$.
Нам будет удобнее работать не с многочленами от x, y, z, u, а с квадратичными формами на четырехмерном вещественном векторном пространстве V. В первых трех пунктах мы переформулируем условие задачи в терминах квадратичных форм и напоминаем их классификацию. Основная (геометрическая) часть доказательства содержится в последних двух пунктах.
1) Напомним, что **квадратичной формой** называется квадратичное отображение $Q : V \to \mathbb{R}$

$$\forall v \in V,\ \forall r \in \mathbb{R} :\ Q(rv) = r^2 Q(v),$$

для которого бинарная операция $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ $v \cdot w := Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ билинейна.
Выберем в пространстве V базис $\{e_i |\ 1 \leq i \leq 4\}$ и зададим функции x, y, z, u на V так, чтобы

$$\forall v \in V\ \ v = x(v)e_1 + y(v)e_2 + z(v)e_3 + u(v)e_4.$$

Используя их, сопоставим однородному многочлену второй степени f квадратичную форму

$$Q_f(v) := f(x(v), y(v), z(v), u(v)).$$

Базис позволяет построить отождествление $\mathbb{RP}^3$ и $\mathbb{P}(V)$, при котором $V(f)$ переходит в

$$V(Q_f) := \{[v] \in \mathbb{P}(V) |\ Q_f(v) = 0\}.$$

2) Группа линейных автоморфизмов V действует на множестве квадратичных форм:

$$A \in Gl(V)\ Q \mapsto A(Q),\ (A(Q))(v) := Q(A(v)).$$

Квадратичные формы **эквивалентны** если они лежат на одной орбите этого действия.

Предположим, что для пары однородных многочленов f_1, f_2 формы Q_{f_i} эквивалентны

$$A(Q_{f_1}) = Q_{f_2}.$$

Соответствующее проективное преобразование $[A] \in PGl(V)$ переводит $V(Q_{f_2})$ в $V(Q_{f_1})$

$$[A]([v]) \in V(Q_{f_1}) \Leftrightarrow Q_{f_1}(A(v)) = 0 \Leftrightarrow Q_{f_2}(v) = 0 \Leftrightarrow [v] \in V(Q_{f_2}).$$

Таким образом достаточно вывести из гомеоморфности пространств $V(Q_{f_i})$ эквивалентность квадратичных форм Q_{f_i}. Мы докажем это следующим образом. Для каждого класса эквивалентности квадратичных форм мы опишем класс гомеоморфизма соответствующего множества нулей и покажем, что они попарно не совпадают.

3) Нам потребуется классификация квадратичных форм с точностью до эквивалентности.

Произвольной квадратичной форме Q сопоставим **симметричную билинейную форму**

$$b_Q : V \otimes V \to \mathbb{R}$$

$$b_Q(v, w) := \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)).$$

Наоборот, по симметричной билинейной форме b можно построить квадратичную форму

$$Q_b(v) = b(v, v),$$

так что полученные отображения взаимнообратны. Действие $Gl(V)$ на квадратичных формах имеет хорошие описание в терминах ассоциированной симметричной билинейной формы:

$$b_{A(Q)}(v, w) = \frac{1}{2}(Q(A(v + w)) - Q(A(v)) - Q(A(w))) = b_Q(A(v), A(w)).$$

Таким образом, описание классов эквивалентности квадратичных форм сводится к описанию множества орбит билинейных симметричных форм относительно действия

$$(A(b))(v, w) = b(A(v), A(w)).$$

Форме b отвечает отображение подстановки $\iota_b : V \to V^*$, заданное следующей формулой

$$\forall v, w \in V\ (\iota_b(v))(w) := b(v, w)$$

Билинейной симметричной форме b можно сопоставить два целочисленных инварианта -
индекс и **ранг**. Рангом формы b называется размерность образа отображения подстановки

$$0 \leq r(b) := \dim Im(i_b) \leq \dim V.$$

Индексом формы b называется максимальная размерность подпространства $W \subset V$, на котором b положительно определено. Индекс $i(b)$ принимает значения от 0 до $r(b)$, так как

$$W \cap \ker \iota_b = \{0\}.$$

Рангом и индексом квадратичной формы Q называется ранг и индекс формы b_Q.
Процесс ортогонализации Грама-Шмидта позволяет получить базис $\{h_i\}$ в V, для которого

$$b(h_i, h_j) = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$b(h_i, h_i) = \begin{cases} 1, & i \leq i(b), \\ -1, & i(b) < i \leq r(b), \\ 0, & r(b) < i. \end{cases}$$

Для пары форм b и $\widetilde{b}$ одинакового ранга и индекса найдется оператор A, такой, что

$$A(h_i) = \widetilde{h_i} \Rightarrow A(b) = \widetilde{b}.$$

Следовательно, квадратичные формы, имеющие одинаковый ранг и индекс, эквивалентны.
4) Таким образом, нам осталось описать топологический тип $V(Q)$ для стандартных квадратичных форм Q, определенных парой значений $(r(Q), i(Q))$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq r(Q) \leq 4, \; 0 \leq i(Q) \leq r(Q).$$

Так как $V(f) = V(-f)$ нам достаточно рассматривать квадратичные формы, для которых индекс не меньше половины ранга. Все такие случаи перечислены в табличке ниже:

$r(Q)$	$r(Q) - i(Q)$	описание множества нулей $V(Q)$	тип
4	2	однополосной гиперболоид	$\mathbb{T}^2$
4	1	эллипсоид	S^2
4	0	пустое	$\emptyset$
3	1	вырожденный гиперболоид	Σ_1
3	0	точка	$\{\mathrm{pt}\}$
2	1	конус над двумя прямыми	Σ_2
2	0	проективная прямая	S^1
1	0	двойная проективная плоскость	$\mathbb{RP}^2$
0	0	проективное пространство	$\mathbb{RP}^3$

Сейчас мы разберем каждый из этих случаев по отдельности.

- **(4,2)** Множество нулей $f(x,y,z,u) = x^2 + y^2 - z^2 - u^2$ отображается в $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$

$$(x : y : z : u) \mapsto (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z}{\sqrt{z^2+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{z^2+u^2}}).$$

  Это отображение корректно определено, так как знаменатели не могут зануляться, а его значение не зависит от выбора представителя $(x : y : z : u)$. Оно биективно.

- **(4,1)** Множество нулей $f = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ лежит в аффинной карте $\{u \neq 0\}$ и задается
$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{A}^3$$

- **(4,0)** Положительно определенная квадратичная форма Q не имеет нулей в $V - 0$;

- **(3,1)** Рассмотрим отображение из гиперболоида в вырожденный гиперболоид

$$Pr : V(x^2 + y^2 - z^2 - u^2) \to V(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$(x : y : z : u) \mapsto (\frac{xz}{\sqrt{z^2+u^2}} : \frac{yz}{\sqrt{z^2+u^2}} : z : u)$$

  Pr корректно определено и сюрьективно, но не инъективно. Прообраз нетривиален для

$$Pr^{-1}(0:0:0:1) = V(x^2+y^2-z^2-u^2) \cap \{z = 0\} = \{(x, y, 0, 1) | \ x^2+y^2 = 1\}.$$

  Отображение гиперболоида в тор отождествляет это подмножество с меридианом тора. Таким образом, Σ_1 может быть описан как тор, в котором стянут меридиан.

- **(3,0)** Множество нулей $f = x^2 + y^2 + z^2$ лежит в карте $\{u \neq 0\}$ и совпадает там с 0;

- **(2,1)** Множество нулей $f = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ есть объединение $V(x - y)$ и $V(x + y)$. Это проективные плоскости, пересекающиеся по проективной прямой. Таким образом,

$$\Sigma_2 = \mathbb{RP}^2 \cup_{\mathbb{RP}^1} \mathbb{RP}^2;$$

- **(2,0)** Множество нулей $f = x^2 + y^2$ совпадает с дополнением до карт $\{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$;

- **(1,0)** Множество нулей $f = x^2$ совпадает с дополнением до аффинной карты $\{x \neq 0\}$;

- **(0,0)** Квадратичная форма $Q = 0$ зануляется на всем проективном пространстве;

5) Осталось увидеть, что все описанные пространства попарно не гомеоморфны. Отбросим точку и пустое множество, про которые все и так понятно. Рассмотрим следующую таблицу

	(4,2)	(4,1)	(3,1)	(2,1)	(2,0)	(1,0)	(0,0)
X	$\mathbb{T}^2$	S^2	Σ_1	Σ_2	S^1	$\mathbb{RP}^2$	$\mathbb{RP}^3$
$\pi_1(X)$	$\mathbb{Z}^2$	{e}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Чтобы различить пространства X, вычислим их фундаментальные группы. Мы предполагаем известным односвязность аффинных пространств и сфер (размерности не меньше двух).

- $\pi_1(X)$ для всех случаев кроме Σ_i известна.

- Чтобы вычислить π_1 вырожденного гиперболоида Σ_1 рассмотрим отображение
$$Pr_* : \pi(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\Sigma_1).$$
Заметим, что оно сюръективно, так что достаточно вычислить ядро этого отображения. Класс меридиана, стягивание которого в $\mathbb{T}^2$ совпадает с Σ_1, лежит в ядре. С другой стороны, Σ_2 допускает отображение в параллель, через которое пропускается стандартное отображение $\mathbb{T}^2 \to S^1$. Таким образом, $\ker Pr_* = \langle [M] \rangle$ и $\pi(\Sigma_1) = \mathbb{Z}$.

- Чтобы вычислить $\pi_1(\Sigma_2)$, воспользуемся теоремой Зейферта-ван Кампена для покрытия
$$\Sigma_2 = \mathbb{RP}^2 \cup_{\mathbb{RP}^1} \mathbb{RP}^2 = U_\epsilon(\mathbb{RP}^2) \cup U_\epsilon(\mathbb{RP}^2),$$
$$\pi_1(\Sigma_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Осталось всего несколько пространств, которые потенциально могут быть гомеоморфны.

- **Σ_1 и S^1:** Предположим, что существует такой гомеоморфизм. Тогда дополнение до двойной точки Σ_1 гомеоморфно прямой и стягиваемо. Но оно диффеоморфно цилиндру.

- **Σ_2, $\mathbb{RP}^2$ и $\mathbb{RP}^3$:** Проективное пространство отличается от других двух пространств наличием третьих когомологий. Предположим, что гомеоморфизм между Σ_2 и $\mathbb{RP}^2$ существует. Рассмотрим точку на $\Sigma_2 - \mathbb{RP}^2$. Дополнение до нее стягивается на $\mathbb{RP}^2$, а дополнение до ее образа - на $\mathbb{RP}^1$. Они не гомотопически эквивалентны, так как имеют разную фундаментальную группу.

Ответ: Верно.
Б) Неверно. Мы приведем пример двух однородных многочленов f_i степени 2, для которых дополнения до нулей $\mathbb{RP}^3 - V(f_i)$ имеют по две компоненты связности но не гомеоморфны.
1) Рассмотрим $f_1 := x^2 - y^2$. Так как $V(f_1)$ это объединение пары проективных плоскостей
$$V(f_1) = V(x-y) \cup V(x+y),$$
пересекающихся по проективной прямой, дополнение $\mathbb{RP}^3 - V(f_1)$ совпадает с дополнением до аффинной плоскости в аффинном пространстве. Следовательно, оно гомеоморфно дизъюнктному объединению двух трехмерных шаров. Таким образом, достаточно найти однородный многочлен f_2, для которого хотя бы одна из двух компонент $\mathbb{RP}^3 - V(f_2)$ не стягиваема.
2) Рассмотрим $f_2 := x^2 + y^2 + z^2 - u^2$. Множество нулей $V(f_2)$ совпадает с единичной сферой, вложенной в аффинную карту стандартным образом. Таким образом, $\mathbb{RP}^3 - V(f_2)$ содержит две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна трехмерному шару. Так как дополнение $\mathbb{RP}^3 - B^3$ гомеоморфно дополнению до точки, достаточно показать нестягиваемость
$$\mathbb{RP}^3 - \{(0:0:0:1)\}.$$
3) Рассмотрим отображение проекции из точки $\{(0:0:0:1)\}$ на проективную плоскость
$$\mathbb{RP}^3 - \{(0:0:0:1)\} \to \mathbb{RP}^2$$
$$(x:y:z:u) \mapsto (x:y:z).$$
Оно сюръективно и кроме того имеет стягиваемые слои, совпадающие с аффинными прямыми, следовательно является гомотопической эквивалентностью. Осталось заметить, что
$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq \{e\}.$$
Ответ: Неверно. □

Задача Ф1

Задача 7. *Точечная частица массы m движется в пространстве R^3 в центрально симметричном силовом поле с потенциальной энергией*
$$U(r) = -U_0 \exp(-r^2/a^2), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
где $U_0 > 0$ и $a > 0$ — заданные вещественные константы, а x, y и z — декартовы координаты в пространстве R^3. Определите, при каких значениях квадрата вектора момента импульса частицы $\vec{J}^2$ возможно финитное движение частицы. Движение называется финитным, если существует такое расстояние L, что $|\vec{r}(t)| < L$ для любого момента t. Здесь $\vec{r}(t)$ — радиус-вектор частицы в момент t. Напомним, что моментом импульса называется векторная величина $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$, где $\vec{p}$ — вектор импульса частицы.

Решение. В любом центрально-симметричном потенциале вектор углового момента $\vec{J}$ является интегралом движения и, как следствие, все траектории частицы лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{J}$. Выберем в этой плоскости полярные координаты (r, ϕ) и запишем лагранжиан системы

$$L = \frac{m}{2}\,(r'^2 + r^2\phi'^2) + U_0 \exp(-r^2/a^2),$$

где штрих означает взятие производной по времени.

Координата ϕ — циклическая, что дает упомянутый закон сохранения углового момента:

$$mr^2\phi' = J.$$

Кроме того, поскольку $\partial L/\partial t = 0$, в системе сохраняется полная механическая энергия:

$$E = \frac{m}{2}\,(r'^2 + r^2\phi'^2) - U_0 \exp(-r^2/a^2).$$

Выразим ϕ' из закона сохранения углового момента и подставим его выражение в формулу для энергии. Мы придем к эффективной одномерной системе с функцией энергии следующего вида:

$$E = \frac{mr'^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} - U_0 \exp(-r^2/a^2) = \frac{mr'^2}{2} + U_{\text{eff}}(r)$$

В системе будут существовать финитные траектории, если эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - U_0 \exp(-r^2/a^2)$$

обладает локальным минимумом в какой-то точке $r_0 > 0$. Поскольку вблизи $r = 0$ и при $r \to \infty$ эффективный потенциал монотонно убывающая непрерывно дифференцируемая функция, то необходимым и достаточным условием существования локального минимума будет наличие значений $r > 0$, при которых его производная *положительна*:

$$\exists\, r > 0 : \quad \frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} > 0.$$

Вычисляя производную, получаем неравенство для величины углового момента J:

$$\exists\, r > 0 : \quad J^2 < 2U_0 m a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \exp(-r^2/a^2).$$

Поскольку функция $x^4 e^{-x^2}$ при положительных $x = r/a$ имеет максимум $4e^{-2}$ (достигается в точке $x = \sqrt{2}$), то финитные траектории в данной системе существуют, если угловой момент удовлетворяет неравенству:

$$J^2 < 8U_0\, m \left(\frac{a}{e}\right)^2.$$

□

Задача Ф2

Задача 8. *Тонкое кольцо радиуса R неподвижно закреплено в пространстве. Вдоль окружности кольца равномерно распределен электрический заряд q. Точечная частица массы m и заряда $-q$ (противоположного по знаку заряду кольца) совершает малые колебания вокруг центра кольца вдоль его оси симметрии, перпендикулярно плоскости кольца. Всеми силами, кроме электромагнитных, можно пренебречь.*

а) **[10 баллов]** *Определите угловую частоту малых колебаний заряженной частицы, пренебрегая потерями энергии на излучение.*

б) **[20 баллов]** *Считая движение частицы нерелятивистским (скорость движения много меньше скорости света), оцените отношение излученной за период энергии к полной механической энергии частицы в приближении, когда это отношение много меньше единицы.*

Решение. **а)** Заряд $-q$ по условию движется вдоль прямой, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его геометрический центр. Обозначим координату заряда на этой прямой символом x, начало отсчета координаты выберем в центре кольца. Пренебрегая энергией поля излучения, запишем лагранжиан заряда в нерелятивистском квазистатическом приближении, справедливом при $Tc \gg R$, где T — период колебаний заряда, а c — скорость света:

$$L = \frac{mx'^2}{2} + \frac{q^2}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Уравнение движения заряда (уравнение Эйлера-Лагранжа) имеет вид:

$$mx'' = -\frac{q^2 x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Разлагая правую часть в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и удерживая только линейные члены (для малых x), получаем уравнение гармонических колебаний заряда вблизи положения равновесия $x = 0$:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{q^2}{mR^3},$$

где ω — искомая угловая частота колебаний.

б) Согласно решению пункта а) заряд $-q$ совершает малые гармонические колебания вокруг положения равновесия, закон которых можно выбрать в виде

$$x(t) = A\cos\omega t.$$

Потери на излучение оценим в дипольном приближении. Поскольку по условию задачи энергия излучения, уносимая из системы за период колебаний, много меньше полной энергии заряда, мы можем считать частоту колебаний постоянной на промежутке времени порядка периода колебаний. Дипольный момент системы образован только дипольным моментом заряда $-q$:

$$D(t) = -qx(t) = -qA\cos\omega t.$$

Согласно классической электродинамике полная мощность дипольного излучения дается формулой

$$P(t) = \frac{2}{3c^3}\,|D''(t)|^2 = \frac{2}{3c^3}\,q^2A^2\omega^4\cos^2\omega t.$$

Энергия, излученная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ равна

$$\Delta E = \int_0^T P(t)dt = \frac{2\pi}{3c^3}\,q^2A^2\omega^3.$$

Полная энергия заряда при гармонических колебаниях выражается формулой

$$E = \frac{1}{2}\,mA^2\omega^2.$$

Поэтому искомое отношение потерь за перид к полной энергии равно:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4\pi}{3}\,\frac{q^2\omega}{mc^3} = \frac{4\pi}{3}\,\left(\frac{q^2}{R\,mc^2}\right)^{3/2}.$$

Отметим, что условие малости выписанного отношения $\Delta E/E \ll 1$ следует из условия применимости квазистатического приближения, которое мы сформулировали при решении пункта а):

$$Tc \gg R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{q}{\sqrt{R}\,\sqrt{mc^2}} \ll 1.$$

$\square$