

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников «Высшая лига»  
по направлению «Математика»

Треки:

«Математика»

«Математика и математическая физика»

Время выполнения задания — 210 минут

*Стоимость каждой задачи указана возле задачи. При подведении итогов по направлению учитываются шесть лучших задач из восьми, при подведении по треку – шесть задач: четыре из основной части и две из выбранного трека. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100 баллов, то результат приравнивается к 100 баллам.*

**ОБЩАЯ (ИНВАРИАНТНАЯ) ЧАСТЬ**

1. [20 баллов] Назовем рогаткой объединение отрезка и двух лучей на плоскости, причём отрезок и оба луча имеют общий конец. Здесь лучи различны, отрезок не принадлежит ни одному из лучей. Назовем рогатки эквивалентными, если их можно совместить аффинным преобразованием плоскости. Опишите классы эквивалентности рогаток.

2. [20 баллов] При каких натуральных  $n$  существует комплексная  $4 \times 4$  матрица  $X$  такая, что

$$X^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Для каждого такого  $n$  приведите пример такой матрицы.

3. [20 баллов] Зафиксируем треугольник  $ABC$  площади 1, вершину  $A$  и сторону  $AB$ . Выберем случайно и независимо точку  $X$  на стороне  $AB$  и точку  $Y$  внутри треугольника  $ABC$ . Покажите, что математическое ожидание площади треугольника  $AXY$  не зависит от выбора исходного треугольника, и найдите его.

4. [20 баллов] Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

## СПЕЦИАЛЬНАЯ (ВАРИАТИВНАЯ) ЧАСТЬ

### Трек «Математика»

1. **[30 баллов]** Для простого  $p$  обозначим через  $\mathbb{F}_p$  поле из  $p$  элементов. Пусть  $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  – неприводимый многочлен степени  $n \geq 1$ . Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{F}_p[x]/(q(x)) \rightarrow \mathbb{F}_p[x]/(q(x)), \quad [f(x)] \mapsto [f(x^p)] \quad \forall f \in \mathbb{F}_p[x]$$

Докажите, что  $\varphi$  корректно определено, является линейным отображением векторных пространств над  $\mathbb{F}_p$  и найдите его минимальный многочлен.

2. **[один пункт 20 баллов, оба пункта 30 баллов]** Для однородного многочлена второй степени  $f \in \mathbb{R}[x, y, z, w]$  обозначим через  $V(f) \subset \mathbb{RP}^3$  множество точек  $(a : b : c : d)$  вещественной проективной плоскости, таких, что  $f(a, b, c, d) = 0$ .

А) Верно ли, что если  $V(f)$  гомеоморфно  $V(g)$ , то существует проективное преобразование пространства  $\mathbb{RP}^3$ , которое переводит одно из них в другое?

Б) Пусть пространства  $\mathbb{RP}^3 \setminus V(f)$  и  $\mathbb{RP}^3 \setminus V(g)$  имеют две компоненты связности. Верно ли, что дополнения  $\mathbb{RP}^3 \setminus V(f)$  и  $\mathbb{RP}^3 \setminus V(g)$  гомеоморфны?

### Трек «Математика и математическая физика»

1. **[30 баллов]** Точечная частица массы  $m$  движется в пространстве  $R^3$  в центральном симметричном силовом поле с потенциальной энергией

$$U(r) = -U_0 \exp(-r^2/a^2), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

где  $U_0 > 0$  и  $a > 0$  – заданные вещественные константы, а  $x, y$  и  $z$  – декартовы координаты в пространстве  $R^3$ . Определите, при каких значениях квадрата вектора момента импульса частицы  $\vec{J}^2$  возможно финитное движение частицы. Движение называется финитным, если существует такое расстояние  $L$ , что  $|\vec{r}(t)| < L$  для любого момента  $t$ . Здесь  $\vec{r}(t)$  – радиус-вектор частицы в момент  $t$ . Напомним, что моментом импульса называется векторная величина  $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ , где  $\vec{p}$  – вектор импульса частицы.

2. Тонкое кольцо радиуса  $R$  неподвижно закреплено в пространстве. Вдоль окружности кольца равномерно распределен электрический заряд  $q$ . Точечная частица массы  $m$  и заряда  $-q$  (противоположного по знаку заряду кольца) совершает малые колебания вокруг центра кольца вдоль его оси симметрии, перпендикулярно плоскости кольца. Всеми силами, кроме электромагнитных, можно пренебречь.

а) **[10 баллов]** Определите угловую частоту малых колебаний заряженной частицы, пренебрегая потерями энергии на излучение.

б) **[20 баллов]** Считая движение частицы нерелятивистским (скорость движения много меньше скорости света), оцените отношение излученной за период энергии к полной механической энергии частицы в приближении, когда это отношение много меньше единицы.

## ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ЗАГРУЖАЕМЫМ ФАЙЛАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

- а) Листы с решениями должны сканироваться или фотографироваться в полную величину, качество изображения должно быть таким, чтобы текст комфортно читался с экрана 12-дюймового монитора, а размер загружаемых файлов был не слишком велик (при правильных настройках сканера/камеры и некоторой сноровке можно легко уложиться в 1 – 5 Мб на страницу).
- б) Изображения должны сохраняться на компьютере в формате jpeg или pdf и загружаться в экзаменационную систему в виде файлов с расширениями .jpg, .jpeg или .pdf.
- в) Изображение в загружаемом файле должно быть ориентировано так, чтобы прочтение текста не требовало поворота кадра на 90 или 180 градусов.
- г) В случае, если Вы фотографируете решения, следите за тем, чтобы
  - плоскость камеры была строго параллельна плоскости листа
  - объектив располагался над листом строго по центру
  - в кадре не было перспективных искажений и больших бессодержательных полей за краями листа
  - никакие куски текста не остались за кадром.

Сначала убедитесь, что всё именно так, и только после этого нажимайте на спуск затвора. Если это позволяет Ваша камера, мы рекомендуем располагать объектив в 60 – 90 см над лежащим на столе листом и использовать зум, чтобы максимально эффективно вписать лист в кадр.

- д) Перед отправкой снимков или сканов на сайт убедитесь на экране своего монитора, что Ваши файлы удовлетворяют предыдущим требованиям (а – в) и при необходимости скорректируйте их (например, поверните изображение или смените расширение файла, если это необходимо).
- е) Выполнение настоящих требований является зоной ответственности участника. В случае, если загруженные изображения им не удовлетворяют, работа может быть аннулирована.