Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

Направление «240. Прикладная математика и информатика»

Время выполнения – 240 мин.

Максимальный балл – 100.

Задание 1 (10 баллов).

Обозначим через tr(B) – след матрицы B, а через $p_B(x) = \det(xI_n - B)$ – ее характеристический многочлен.
Назовем матрицу B размера $n \times n$ с действительными элементами *дополняемой*, если найдутся n–мерные вектора $\overline{u}$ и $\overline{v}$ с действительными элементами, такие, что для *дополненной* матрицы

$$A = \begin{pmatrix} B & \overline{u}^T \\ \overline{v} & \tau(n) \end{pmatrix}, \qquad \tau(n) = \frac{tr(B)}{n}$$

(здесь $\overline{u}^T$ – вектор столбец) справедливо

$$p'_A(x) = np_B(x)$$

Назовем матрицу B *уникально дополняемой*, если найдется фиксированное число t, такое, что для любой *дополненной* матрицы A выполнено det(A) = t. Является ли матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *уникально дополняемой*? Если да, то каково значение параметра t?

Задание 2 (10 баллов).

Докажите сходимость ряда и найдите сумму

$$\frac{1}{1!+2!} + \frac{1}{3!+4!} + \frac{1}{5!+6!} + \cdots$$

Задание 3 (10 баллов).

Найдите площадь области, которая ограничена кривыми

$$x^2 + y^2 = 2(xy + x + y), x + 2y = 4$$

Задание 4 (10 баллов).

Известно, что в (простом, неориентированном) графе G на 20 вершинах есть гамильтонов цикл. В G добавили еще одну вершину и соединили ее с какими-то
а) 10-ю;
б) 11-ю
другими. Верно ли, что в получившемся графе обязательно существует гамильтонов цикл?

Задание 5 (10 баллов).

Сколько можно придумать названий курсовых длиной 50 символов, таких, что в каждом должны встречаться буквы IT ровно 4 раза, а оставшиеся места должны быть заполнены произвольными русскими буквами (без пробелов)?

Задание 6 (10 баллов).

Связный неориентированный граф с V (V>1) вершинами и E рёбрами задан списками смежности, то есть массивом из списков вершин-соседей для каждой из вершин графа.

(a) Предложите алгоритм, раскрашивающий не более $\left[\frac{V}{2}\right]$ вершин (где [x] означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x) таким образом, чтобы у каждой не раскрашенной вершины был хотя бы один раскрашенный сосед. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

(b) Оптимизируйте алгоритм так, чтобы он выполнялась за O(V+E) операций. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В обоих пунктах нельзя апеллировать к реализациям структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования.

Задание 7 (10 баллов).

Строка t называется суффиксом строки s, если s представима в виде s = t't, где t' — некоторая строка, возможно, пустая.

Даны два массива A[1:n] и B[1:m] ($m \leqslant n$) строк длины, не превосходящей k. Предложите алгоритм, для каждого i находящий количество строк из массива A, для которых B[i] является суффиксом. Время работы алгоритма (то есть число операций) не должно превосходить O(nk).

Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В данном задании нельзя апеллировать к реализациям типов данных, структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования. Все используемые алгоритмы должны быть подробно описаны.

Задание 8 (10 баллов).

Пусть дана выборка (X_1, ..., X_n) независимых, одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет распределение с плотностью

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{если } x \geq \theta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия. Используйте статистику максимального правдоподобия для построения γ-доверительного интервала для θ.

Задание 9 (10 баллов).

Пусть дана выборка (X_1, ..., X_n) независимых, одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет распределение с плотностью

$$g\theta\ (x) = \theta p\ (x) + (1-\theta)\ q(x),\ 0 \le \theta \le 1.$$

Пусть $p(x)$ – плотность стандартного нормального закона $N(0,1)$, а $q(x)$ – плотность равномерного распределения на отрезке $[-1,1]$. Оцените параметр θ, исследуйте предложенную оценку на несмещенность и состоятельность.

Задание 10 (10 баллов).

Перед Магнусом Карлсеном пустая шахматная доска 8 на 8 клеток и большой запас королей. По шахматным правилам, король ходит на одну клетку в любом направлении, в том числе и по диагонали.

Первого короля Магнус ставит на доску равновероятно на любое свободное место. Последующих королей Магнус ставит на доску по очереди, равновероятно на свободные места так, чтобы короли не били друг друга. Останавливается Магнус, когда ни одного нового короля невозможно разместить так, чтобы он не бил предыдущих.

Найдите ожидаемое количество королей, которых сможет расположить Магнус.