Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

Направление: «290. Теория игр»

Время выполнения – 180 мин.

Максимальный балл – 100.

Задание 1 (15 баллов).

«Кофе и чистые равновесия»

Экономист-фаталист Петя обожает случайность, но в играх признает только равновесия в чистых стратегиях. Он злоупотребляет кофе и хочет доверить борьбу с этой вредной привычкой случаю.

Петя хочет сократить среднее потребление кофе до одной чашки в день. Каждый день Петя собирается генерировать на компьютере одну случайную* игру с 20 игроками и 21 чистыми стратегиями у каждого из них, решать эту игру, и немедленно выпивать столько чашек кофе, сколько у игры окажется чистых равновесий. То есть в какие-то дни Пете придется обойтись без кофе, а в какие-то он сможет насладиться несколькими чашками.

Достигнет ли Петя своей цели?

*Для каждого профиля чистых стратегий, полезности игроков --- независимые случайные величины равномерно распределенные на [0,1].

“Coffee in pure equilibria”

The fatalist-economist Peter loves randomness, but in games he recognizes only equilibria in pure strategies. He abuses coffee and wants to entrust the fight against this bad habit to chance.

Peter wants to reduce his average coffee consumption to one cup a day. Every day Peter is going to generate one random* game on the computer with 20 players and 21 pure strategies for each of them, solve this game, and immediately drink as many cups of coffee as the game has pure equilibria. That is, on some days Peter will have to do without coffee, and on some days he will be able to enjoy several cups.

Will Peter achieve his goal?

*For every profile of pure strategies, the players' utilities are independent random variables uniformly distributed on [0,1].

Задание 2 (10 баллов).

«Дважды два»

Марина и Дима тренируются решать задачи на смешанные стратегии. Они уже порешали несколько игр 2x2 с нулевой суммой без равновесия в чистых стратегиях и обнаружили, что игроки всегда смешивают стратегии с одинаковыми вероятностями.

Всегда ли такое происходит? Если да, докажите; если нет, найдите условие, при котором это верно.

“Two by two”

Marina and Dima train to solve problems on the equilibrium in mixed strategies. They have already solved several 2x2 zero-sum games without equilibrium in pure strategies and found that players always mix strategies with the same probabilities.

Does this always happen? If yes, prove it, if not, find a condition under which this is true.

Задание 3 (25 баллов).

«Задача на Нобеля»
В 2019 году состоялся аукцион по продаже прав на вылов краба. Было 50 одинаковых лотов и 10 участников. Каждый участник хотел купить до 10 лотов не выше определённой цены, различной для каждого участника, но одинаковой для каждого лота (индивидуальная ценность) 91, 87, 81, 66, 51, 50, 48, 38, 32, 29 миллионов рублей. Ценности и спрос участников являются общим знанием (common knowledge).
Организатор решил продавать каждый лот на отдельном английском аукционе с фиксированным шагом в 1 рубль (размер шага можно считать бесконечно малым). Но при этом организатор сравнивает два формата проведения аукциона: последовательный и параллельный. В последовательном формате лоты продаются по порядку на 50 отдельных торгах, и следующие торги начинаются только после окончания предыдущих. В параллельном лоты продаются одновременно, так что каждый участник может участвовать в любых торгах, и все торги заканчиваются когда ни на один лот ставка не повышается.
Какой формат принесёт большую выручку в равновесии Нэша совершенном на подыграх?

“Nobel problem”
In 2019, an auction was held to sell the rights to catch crabs. There were 50 identical lots and 10 participants. Each participant wants to buy up to 10 lots, no higher than a certain price different for each participant, but the same for each lot (individual value) 91, 87, 81, 66, 51, 50, 48, 38, 32, 29 million rubles. The values and the demand of the participants are common knowledge.
The organizer decides to sell each lot at a separate English auction with a fixed step of 1 ruble (the step size can be considered infinitely small). However, the organizer compares two auction formats: sequential and parallel. In the sequential format, the auctions are conducted one by one, i.e., the next one starts only after the previous has ended. In parallel, lots are sold at the same time, so that each participant can participate in any bidding; the biddings end once nobody wants to increase further any of the bids.
Which format will bring the highest revenue in subgame perfect Nash equilibrium?

Задание 4 (15 баллов).

«Меньше знаешь, крепче спишь»
Зина и Нина играют в игру с конечным числом чистых стратегий и выигрышами, зависящими от случайного состояния (орел или решка с вероятностью 1/2). Например, Зина и Нина - инвесторы, и успешность инвестиций каждой из них зависит как от действий конкурентки, так и от того пойдет ли рынок "вверх" или "вниз".
Рассмотрим два варианта игры. В первом Зина знает реализацию случайного состояния, а Нина не знает (но знает что Зина знает). Во втором, обе девочки не знают реализации. Пусть равновесные выигрыши Зины V1 и V2, соответственно.
Предполагая, что равновесие в игре единственно, ответьте на следующий вопросы:
(a) (10 баллов) Может ли V1 быть меньше V2, если игра с нулевой суммой?
(b) (5 баллов)Тот же вопрос для произвольных игр?

“The less you know the better you sleep”

Zina and Nina play a game with a finite number of pure strategies and payoffs depending on a random state (heads or tails with probability 1/2). For example, Zina and Nina are investors, and the success of their investments depends both on the actions of the competitor and on whether the market goes "up" or "down".
Consider two variants of the game. In the first, Zina knows the realization of a random state, but Nina does not know (but knows that Zina knows). In the second, both girls don't know the realization. Let Zina's equilibrium payoffs be V1 and V2, respectively.
Assuming there is only one equilibrium in the game, answer the following questions:
(a) (10 points) Can V1 be less than V2 if the game is zero-sum?
(b) (5 points) The same question but for the arbitrary games?

Задание 5 (20 баллов).

«Элементарно, Ватсон!»
Два логика сидят в одной комнате и играют в такую игру. Им дали два целых неотрицательных числа, про которые известно, что
(a) (7 баллов) числа отличаются не более чем на 1 и оба числа не превосходят 5.
(b) (13 баллов) числа отличаются не более чем на 2.
Каждую минуту логиков спрашивают, знают ли они число партнера. Тот, кто первым узнает число партнера --- выиграл. Кто из логиков выиграет в этой игре и как?

“This is elementary, Watson!”
Two logics sit in the same room and play the following. They get two non-negative integer numbers, one for each, about which it is known that
(a) (7 points) the numbers differ by no more than 1 and both numbers do not exceed 5.
(b) (13 points) the numbers differ by no more than 2.
Every minute, logics are asked if they know the partner's number. The one who is the first who knows the partner's number is the winner. Which logics will win in this game and how?

Задание 6 (15 баллов).

«С ног на голову»
Пусть A - игра с нулевой суммой и конечным числом чистых стратегий. Обозначим через -A (“минус A”) игру, где все выигрыши поменяли знак.
(a) (5 баллов) Бывает ли так, что значение V(A) не равно -V(-A)? Приведите пример или докажите, что примеров нет.
(b) (10 баллов) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в A у каждого из игроков есть оптимальная стратегия, использующая все чистые с положительной вероятностью.

“Turn upside down”
Let A be a zero-sum game with a finite number of pure strategies. Let's denote by -A (“minus A”) the game where all the payoffs have changed their sign.
(a) (5 points) Is it possible that the game value V (A) is not equal to -V (-A)? Give an example or prove the impossibility.
(b) (10 points) The same question if it is additionally known that in (a) every player has an optimal strategy that uses all pure strategies with positive probabilities.