Профиль: «Теория игр» **КОД - 290**

Время выполнения задания – <u>180 мин</u>., язык – <u>русский или английский</u>.

Решите все задачи.
Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

1. (15 баллов) «Кофе и чистые равновесия»

Экономист-фаталист Петя обожает случайность, но в играх признает только равновесия в чистых стратегиях. Он злоупотребляет кофе и хочет доверить борьбу с этой вредной привычкой случаю.
Петя хочет сократить среднее потребление кофе до одной чашки в день. Каждый день Петя собирается генерировать на компьютере одну случайную* игру с 20 игроками и 21 чистыми стратегиями у каждого из них, решать эту игру, и немедленно выпивать столько чашек кофе, сколько у игры окажется чистых равновесий. То есть в какие-то дни Пете придется обойтись без кофе, а в какие-то он сможет насладиться несколькими чашками.
Достигнет ли Петя своей цели?
*Для каждого профиля чистых стратегий, полезности игроков --- независимые случайные величины равномерно распределенные на [0,1].

(15 points) "Coffee in pure equilibria"

The fatalist-economist Peter loves randomness, but in games he recognizes only equilibria in pure strategies. He abuses coffee and wants to entrust the fight against this bad habit to chance.
Peter wants to reduce his average coffee consumption to one cup a day. Every day Peter is going to generate one random* game on the computer with 20 players and 21 pure strategies for each of them, solve this game, and immediately drink as many cups of coffee as the game has pure

equilibria. That is, on some days Peter will have to do without coffee, and on some days he will be able to enjoy several cups.
Will Peter achieve his goal?
*For every profile of pure strategies, the players' utilities are independent random variables uniformly distributed on [0,1].

Ответ: да

Решение.

Покажем, что для случайной игры с N игроками и M чистыми стратегиями у каждого из них ожидаемое число чистых равновесий равно одному.
Ожидаемое число чистых равновесий можно представить как сумму вероятностей что данный профиль чистых стратегий является равновесием по всем M^N профилям чистых стратегий. Фиксируем какой-нибудь профиль и найдем вероятность, что он является равновесием. Вероятность, что игрок 1 не имеет выгодных отклонений, равна 1/M (это вероятность, что максимум из M независимых одинаково распределенных случайных величин достигается на данной случайной величине); аналогично для других игроков i=2,...N. По независимости, вероятность что никто не имеет выгодных отклонений равна (1/M)^N.
Итого, мы имеем M^N слагаемых, каждое из которых равно (1/M)^N, а значит сумма равна одному.

Критерии.

4 балла - верно указано общее количество исходов в игре
7 баллов - верно рассчитана вероятность отдельного профиля, что он является равновесием Нэша в чистых стратегиях
3 балла - верная общая логика поиска математического ожидания количества равновесий в чистых стратегиях
1 балл - только верный ответ без объяснения

2. (10 баллов) «Дважды два»
Марина и Дима тренируются решать задачи на смешанные стратегии. Они уже порешали несколько игр 2x2 с нулевой суммой без равновесия в чистых стратегиях и обнаружили, что игроки всегда смешивают стратегии с одинаковыми вероятностями.
Всегда ли такое происходит? Если да, докажите; если нет, найдите условие, при котором это верно.

(10 points) “Two by two”
Marina and Dima train to solve problems on the equilibrium in mixed strategies. They have already solved several 2x2 zero-sum games without equilibrium in pure strategies and found that players always mix strategies with the same probabilities.
Does this always happen? If yes, prove it, if not, find a condition under which this is true.

Решение.

Рассмотрим игру с нулевой суммой и следующей матрицей:

	L	R
U	a	b
D	c	d

Чтобы в игре не было равновесий в чистых стратегиях, достаточно потребовать наличие отклонений от каждого профиля у одного из игроков.
Отклонения по часовой стрелке: $a>b$, $d>b$, $c<d$, $c<a$
Отклонения против часовой: $a<c$, $c>d$, $b>d$, $a<b$

Введем обозначение для смешанных стратегий: пусть $s1=pU+(1-p)D$, $s2=qL+(1-q)R$

Игроки будут смешивать с одинаковыми весами в своих стратегиях, если выполняется либо $p=q$, либо $p=1-q$.

Вычислим p из условия безразличия для игрока 2: $-ap-c(1-p)=-bp-d(1-p)$. Откуда $p=(c-d)/(b+c-a-d)$. Заметим, что знаменатель отличен от нуля, а вся дробь гарантированно является вероятностью из (0, 1).

Вычислим q из условия безразличия для игрока 1: $aq+b(1-q)=cq+d(1-q)$. Откуда $q=(b-d)/(b+c-a-d)$. Как и выше, что знаменатель отличен от нуля, а вся дробь гарантированно является вероятностью из (0, 1).

Тогда условие $p=q$ немедленно дает $b=c$.
Условие $p=1-q$ дает $a=d$.

Естественно, достаточно выполнения одного из полученных условий.

Критерии.

Правильно найдена вероятность в смешанной стратегии — по 3 балла за каждую
2 балла за случай $p=q$
2 балла за случай $p=1–q$

Типовые случаи и их разбалловка:
Не рассмотрен случай $p=1–q$. Ставилось 8 баллов.
Рассмотрен только случай $p=q=0.5$. Ставилось 8 баллов.
Приведен пример, в котором показано, что в нем вероятности не равны. Ставилось 2 балла.

3. (25 баллов) «Задача на Нобеля»
В 2019 году состоялся аукцион по продаже прав на вылов краба. Было 50 одинаковых лотов и 10 участников. Каждый участник хотел купить до 10 лотов не выше определённой цены, различной для каждого участника, но одинаковой для каждого лота (индивидуальная ценность) 91, 87, 81, 66, 51, 50, 48, 38, 32, 29 миллионов рублей. Ценности и спрос участников являются общим знанием (common knowledge).

Организатор решил продавать каждый лот на отдельном английском аукционе с фиксированным шагом в 1 рубль (размер шага можно считать бесконечно малым). Но при этом организатор сравнивает два формата проведения аукциона: *последовательный* и *параллельный*. В последовательном формате лоты продаются по порядку на 50 отдельных торгах, и следующие торги начинаются только после окончания предыдущих. В параллельном лоты продаются одновременно, так что каждый участник может участвовать в любых торгах, и все торги заканчиваются когда ни на один лот ставка не повышается.
Какой формат принесёт большую выручку в равновесии Нэша совершенном на подыграх?

(25 points) "Nobel problem"
In 2019, an auction was held to sell the rights to catch crabs. There were 50 identical lots and 10 participants. Each participant wants to buy up to 10 lots, no higher than a certain price different for each participant, but the same for each lot (individual value) 91, 87, 81, 66, 51, 50, 48, 38, 32, 29 million rubles. The values and the demand of the participants are common knowledge.
The organizer decides to sell each lot at a separate English auction with a fixed step of 1 ruble (the step size can be considered infinitely small). However, the organizer compares two auction formats: sequential and parallel. In the sequential format, the auctions are conducted one by one, i.e., the next one starts only after the previous has ended. In parallel, lots are sold at the same time, so that each participant can participate in any bidding; the biddings end once nobody wants to increase further any of the bids.
Which format will bring the highest revenue in subgame perfect Nash equilibrium?

Решение.

В каждом формате равновесный исход такой, что каждый лот продаётся по цене 50, следовательно выручка одинакова и равна 2500.

Докажем, что в ПАРАЛЛЕЛЬНОМ формате равновесная цена на каждый лот равна 50. Заметим, что стратегия торговаться за каждый лот до цены 50 (т.е. 50 миллионов + рубль) является равновесной. Обозначим эту стратегию за S. Покажем, что все другие равновесные стратегии (их может быть очень много) приводят к такому же ценовому исходу.

Пронумеруем участников в порядке уменьшения ценности 1,2,3...10.
В равновесии цена на каждый лот не ниже 50, иначе кто-то из первых 5 участников не удовлетворил свой спрос и предпочтёт отклониться от своей стратегии в стратегию S (ставить на все лоты до 50).

Цены на все лоты равны, иначе участник, платящий за более дорогой лот, может отклониться в S и вместо этого лота купить какой-то другой по более низкой цене.

Докажем, что равновесная цена на все лоты равны 50. В течение аукциона цены могут только расти. Как только цены на все лоты перевалили за 50, осталось 5 активных участников, и спрос стал равен предложению. После этого никто не может повысить ставку по правилам аукциона (каждый лидирует ровно в 10 торгах). Поэтому «последний участник» — участник, сделавший последнюю ставку — в равновесии поднимает цену на последний лот до 50, но не выше. «Предпоследний участник», перед ставкой которого остаётся 2 лота с ценой ниже 50, а после ставки которого остаётся только один лот с ценой ниже 50, поднимет цену на один из этих лотов до 50 (а не выше 50, иначе можно выгодно отклониться в S). Аналогично, каждый такой «предыдущий участник» поднимает цену на каждый лот до 50. Значит, цена каждого лота 50.

Докажем, что в ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ формате равновесная цена на каждый лот равна 50. Заметим, что стратегия S — торговаться до 50 за каждый доступный лот тоже равновесная стратегия. Докажем, что любая другая стратегия приводит к такому же ценовому исходу.

В последовательном формате победители те же: участники с 1 по 5 (иначе один из них купил менее 10 лотов, и один из лотов был продан за дешевле 50, и этот участник мог выгодно отклониться от своей стратегии в стратегию S). Последний лот был продан не дешевле 50, иначе участник 6 может отклониться от своей стратегии в стратегию S. Последний лот был продан не дороже 50, так как только у одного из участников 1...5 был остаточный спрос на 1 лот. Значит, последний лот был продан за 50. Аналогично, предпоследний лот был продан не дешевле 50, но и не дороже: иначе победитель отклонится от своей стратегии в стратегию S и, если его ставку перебьют выше 50, получит последний лот за 50. Значит, предпоследний лот был продан за 50. Применяя эту индукцию далее, получим, что все лоты были проданы за 50.

Критерии.

25 - правильный ответ + относительно полное доказательство
20 - ответ, что будет одинаково + доказательство, что они будут проданы за 51
10 - ответ, что неодинаково, но одно из равновесий верное с верной суммой в 2500 с верным доказательством
5 - ответ, что будет одинаково, но доказательство того, что они будут проданы по ценам следующего участника (первые 10 лотов - по цене второго, следующие - по цене третьего ...)
5 - ответ, что в одном из случаев будут все лоты по 51, а в другом как-то по-другому, не 50.
0 - неверный ответ и неверные выручки продавца

За качество доказательства баллы нигде не снимались: везде, где есть правильный ответ хотя бы на один из случаев - там есть относительно нормальное доказательство.

4. (15 баллов) «Меньше знаешь, крепче спишь»
Зина и Нина играют в игру с конечным числом чистых стратегий и выигрышами, зависящими от случайного состояния (орел или решка с вероятностью 1/2). Например, Зина и Нина - инвесторы, и успешность инвестиций каждой из них зависит как от действий конкурентки, так и от того пойдет ли рынок "вверх" или "вниз".
Рассмотрим два варианта игры. В первом Зина знает реализацию случайного состояния, а Нина не знает (но знает что Зина знает). Во втором, обе девочки не знают реализации. Пусть равновесные выигрыши Зины V1 и V2, соответственно.

Предполагая, что равновесие в игре единственно, ответьте на следующий вопросы:

(a) **(10 баллов)** Может ли V1 быть меньше V2, если игра с нулевой суммой?

(b) **(5 баллов)**Тот же вопрос для произвольных игр?

(15 points) "The less you know the better you sleep"

Zina and Nina play a game with a finite number of pure strategies and payoffs depending on a random state (heads or tails with probability 1/2). For example, Zina and Nina are investors, and the success of their investments depends both on the actions of the competitor and on whether the market goes "up" or "down".

Consider two variants of the game. In the first, Zina knows the realization of a random state, but Nina does not know (but knows that Zina knows). In the second, both girls don't know the realization. Let Zina's equilibrium payoffs be V1 and V2, respectively.

Assuming there is only one equilibrium in the game, answer the following questions:

(a) **(10 points)** Can V1 be less than V2 if the game is zero-sum?

(b) **(5 points)** The same question but for the arbitrary games?

Решение.

(a) Так не бывает. Ведь Зина может проигнорировать имеющуюся у нее информацию и использовать оптимальную стратегию из второй игры в первой. А эта стратегия гарантирует ей V_2 против ЛЮБОЙ стратегии Нины (тут используем, что сумма ноль). Значит V_1 больше или равно V_2.

(b) Может. Известно, что если у игроков становится больше стратегических возможностей, в равновесии от этого всем может стать хуже. Тут тот же эффект.

Например, в отсутствии информации Зина и Нина могут кооперировать и делить прибыль. Предположим, что у Зины есть чистая стратегия которая позволяет ей забрать всю прибыль себе в одном из состояний, но в другом ведет к огромным потерям. Без информации, эту стратегию использовать рискованно, но она становится привлекательной, когда Зина знает состояние. Соответственно, в первой игре кооперация разваливается и все страдают.

Пример: Зина выбирает строки, Нина столбцы; в записи (x,y) --- x выигрыш Зины, y выигрыш Нины

Выигрыши в состоянии 0:

(1,1)	(0,0)
(-100,-100)	(0,0)

Выигрыши в состоянии 1:

(1,1)	(0,0)
(100,-100)	(0,0)

Если Зина не знает состояния, то равновесие Верх-Лево, обе получают (1,1). Если Зина знает состояние, у нее слабо-доминантная стратегия в состоянии 1 выбрать Низ. Нина очень боится этого выбора и поэтому играет безопасную стратегию Право. Так что, когда Зина информирована, обе девочки получают (0,0).

Критерии.

Правильный ответ — 3 для а), 1 для б).
Рассуждения и попытка построить игру, но без успеха — 1 для а) и б)
Обоснование неясное при правильном ответе, но без явных ошибок — снятие 5 баллов для а) и 2 бала для б) от полного балла.
Полное обоснование — полный балл.

5. (20 баллов) «Элементарно, Ватсон!»
Два логика сидят в одной комнате и играют в такую игру. Им дали два целых неотрицательных числа, про которые известно, что

(a) **(7 баллов)** числа отличаются не более чем на 1 и оба числа не превосходят 5.
(b) **(13 баллов)** числа отличаются не более чем на 2.

Каждую минуту логиков спрашивают, знают ли они число партнера. Тот, кто первым узнает число партнера --- выиграл. Кто из логиков выиграет в этой игре и как?

(20 points) "This is elementary, Watson!"
Two logics sit in the same room and play the following. They get two non-negative integer numbers, one for each, about which it is known that

(a) **(7 points)** the numbers differ by no more than 1 and both numbers do not exceed 5.
(b) **(13 points)** the numbers differ by no more than 2.

Каждую минуту логиков спрашивают, знают ли они число партнера. Тот, кто первым узнает число партнера --- выиграл. Кто из логиков выиграет в этой игре и как? Every minute, logics are asked if they know the partner's number. The one who is the first who knows the partner's number is the winner. Which logics will win in this game and how?

Решение.

Решение различно в зависимости от того знают ли логики на сколько отличаются числа. Обе интерпретации считаются корректными.

(a) Рассмотрим случай когда логики знают, что числа отличаются в точности на 1. То есть их числа либо (n,n+1) либо (n+1,n) с n=0,...4, каждый знает свое число, а про число оппонента знает лишь что оно либо больше на 1 либо меньше на 1.

Если реализовалась ситуация (0,1) или (1,0), то логик с нулем мгновенно делает вывод, что число оппонента равно 1 т.к. отрицательные числа запрещены. Аналогично поступает логик с числом 5 в случае (4,5) или (5,4).

Если реализовалась ситуация (1,2) или (2,1), то поначалу никто не может вывести число соперника. Например, логик получивший 1 не знает равняется ли число оппонента 2 или 0. Однако, после того как логики озвучивают, что не знают чисел оппонента, логик с 1 исключает (1,0) и таким образом выводит что число оппонента равно 2.
Аналогично, в случае (3,4) или (4,3), логик с большим числом выигрывает после одной итерации.

Для пар (2,3) или (3,2) похожий анализ приводит к необходимости 3ех шагов. В силу симметричности, оба логика узнают число оппонента одновременно, т.е. реализуется ничья.

Если логики знают что числа совпадают (т.е. отличаются на 0), то каждый вместе со своим числом узнает и число оппонента. Опять ничья.

Предположим теперь, что логики не знают на сколько отличаются числа, а знают только что они отличаются *не больше* чем на 1. В этом случае логики опять же сыграют вничью, но на этот раз потому что игра будет продолжаться бесконечно долго.
Когда разница была известна, сообщение что оппонент *не знает* числа было информативно потому что оно исключало возможность определенных ситуаций (например, для чисел (0,1), логик с нулем никогда не говорит что *не знает*). Если же разница между числами неизвестна, то в любой ситуации (n,n+1), (n+1,n), (n,n) с любым n, каждый из логиков может *не знать* числа оппонента, а значит и сообщение об этом не несет никакой информации.
Даже, если список возможных пар состоит только из (0,1), (1,0), (1,1), (0,0) игра будет продолжаться бесконечно, начавшись с любой из пар.

(b) Рассмотрим сначала случая известной разницы. Задача с разницей 0 не интересна, так что рассмотрим разницу в 1 или 2.
Пусть разница известна и равна 1, т.е. числа равны (n, n+1) или (n+1,n), где n=0,1,.... При n=0 и n=1, повторяя аргумент из а), мы видим, что логик с меньшим числом выигрывает за после n шагов. По индукции выводим, что тот же результат верен для произвольного n.

Если разница равна 2 и известна, задача сводится к предыдущей для целой части от деления на 2. В качестве первого шага индукции рассматриваются комбинации вида (0, 2) и (1, 3). Далее сдвигаемся на шаг вправо, с учетом четности своего числа. Тогда за конечное число шагов каждый логик может восстановить число оппонента.

Если разница между числами неизвестна с точностью, то игра продолжается бесконечно долго, см. аргумент из пункта (а).

Критерии.

7 баллов - пункт (а) сделан правильно в одной из постановок.
10 баллов - пункт (а) сделан правильно в случае различных чисел и также указано, что если допустить одинаковые числа, то логики не могут угадать (без объяснения почему).
Снимался 1 балл, если не разобрана ситуация в (а) 2-3 или 3-2 и не указана ничья в ней.
Снимались от 1 до 4 баллов за недостаточные объяснения, отдельно в каждом пункте.
До 3 баллов могли поставить за аккуратные первые шаги индукции без полного решения.
До 6 баллов за пункт (а) и до 10 баллов за пункт (b) можно было получить за очень детальный подсчет вероятностей угадывания.
До 10 баллов в сумме за оба пункта можно было получить за введение очередности ходов и попытки прописать вероятности в такой постановке, в зависимости от степени логической обоснованности процедуры. Хотя это была уже третья возможная постановка задачи, которая не подразумевалась изначально. Но мы ценили разумные рассуждения.

6. (15 баллов) «С ног на голову»

Пусть A - игра с нулевой суммой и конечным числом чистых стратегий. Обозначим через -A (“минус A”) игру, где все выигрыши поменяли знак.

(a) **(5 баллов)** Бывает ли так, что значение V(A) не равно -V(-A)? Приведите пример или докажите, что примеров нет.

(b) **(10 баллов)** Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в A у каждого из игроков есть оптимальная стратегия, использующая все чистые с положительной вероятностью.

(15 points) “Turn upside down”

Let A be a zero-sum game with a finite number of pure strategies. Let's denote by -A (“minus A”) the game where all the payoffs have changed their sign.

(a) **(5 points)** Is it possible that the game value V (A) is not equal to -V (-A)? Give an example or prove the impossibility.

(b) **(10 points)** The same question if it is additionally known that in (a) every player has an optimal strategy that uses all pure strategies with positive probabilities.

Решение.

a) Да, бывает. Пример: одна стратегия у максимайзера и две у минимайзера, матрица (=столбец) платежей (1,-2)

b) Нет не бывает. В игре A, оптимальная стратегия каждого из игроков гарантирует ему V(A) против любой чистой стратегии оппонента (если бы это было не так, оппонент не смешивал бы все чистые стратегии в своем оптимальном ответе). Следовательно, та же пара стратегий гарантирует выигрыш -V(A) в игре -A.

Критерии.

(a) 1 балл за правильный ответ, 4 балла за правильно приведенный пример игры

(b) 2 балла за правильный ответ, 8 баллов за общее доказательство (иногда ставились 4 балла из 8, при наличии существенных замечаний к доказательству)