Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига» – 2021 г.
Решения задач и критерии оценивания по направлению «320. Физика»

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Двойная звездная система состоит из двух одинаковых звезд масс m, которые вращаются вокруг их центра тяжести, а также испытывают быстрые вращения с одинаковой угловой скоростью ω вокруг осей, перпендикулярных плоскости эклиптики. За счет приливных сил угловая скорость вращения ω уменьшается. Что при этом происходит с расстоянием R между звездами? Выразить $\partial_t R$ через $\partial_t \omega$, считая, что массы звезд m однородно распределены по шарам радиуса $r \ll R$.

Решение: Момент инерции звезды равен $I = (2/5)mr^2$, а ее угловой момент равен $I\omega = (2/5)mr^2\omega$, где ω - угловая скорость вращения звезды. Скорость движения звезды по круговой орбите радиуса $R/2$ равен:

$$u = \left(\frac{Gm}{2R}\right)^{1/2}.$$

Суммарный момент импульса системы равен

$$L = 2\cdot\frac{2}{5}\cdot mr^2\omega + muR = \frac{4}{5}\cdot mr^2\omega + m\left(\frac{GmR}{2}\right)^{1/2}.$$

Так как момент внешних сил $M = dL/dt$ равен нулю $M = 0$, то приравняв производную момента импульса по времени нулю, находим:

$$\frac{4}{5}r^2\partial_t\omega = -\left(\frac{Gm}{8m}\right)^{1/2}\partial_t R.$$

Таким образом, если ω уменьшается, то R растет.

Разбалловка

Записан момент инерции звезды	1 балл
Получена скорость вращения звезды относительно центра инерции	4 балла
Записан суммарный момент импульса системы	9 баллов
Указано, что суммарный момент импульса сохраняется	2 балла
Получено выражение для дифференциала угловой скорости	3 балла

Задача 2. Внутри шарообразного сосуда находится газ с абсолютной температурой T. Стенки сосуда являются абсорбирующими, то есть поглощают все падающие на них молекулы газа. Что происходит с температурой газа? Найти $\partial_t T$.

Решение: Обозначим u скорость молекулы газа в направлении стенки. Вероятность найти молекулу со скоростями в интервале du дается Максвелловским фактором

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right)du,$$

где m - масса молекулы газа. Число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади стенки равно

$$Q = n\int_0^\infty u \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right) du = n\sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} ,$$

где n - плотность газа (число молекул в единицу объема). Эти частицы уносят кинетическую энергию в единицу времени на единицу площади стенки, которая связана с движением вдоль стенки

$$n\int_0^\infty u \cdot \frac{mu^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right) dv = k_B T Q .$$

Суммарный же унос кинетической энергии (связанный с движением вдоль и поперек стенки) в единицу времени равен $2k_B TQS$, где $S = 4\pi R^2$. Напишем теперь баланс числа частиц и кинетической энергии:

$$\partial_t (nV) = -QS ,$$

$$\partial_t \left(nV \frac{3k_B T}{2} \right) = -2k_B TQS ,$$

где $V = 4\pi R^3 / 3$. Отсюда

$$nV \frac{3}{2} \partial_t T = -\frac{T}{2} QS .$$

Подставляя сюда $Q,\ V,\ S$ находим

$$\partial_t \ln T = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} .$$

Разбалловка

Записано распределение Максвелла для молекул	3 балла
Найдено число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади стенки	4 балла
Найдена энергия, уносимая молекулами, за единицу времени	5 баллов
Записаны уравнения, описывающие унос частиц и энергии	5 баллов
Получен ответ	3 балла

Задача 3. Плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними h разряжается через сопротивление R. Найти энергию, которая будет излучена во время этого процесса, если первоначальный заряд конденсатора q_0.

Решение: Вся запасенная энергия в конденсаторе расходуется двумя путями: тепловые потери на резисторе и непосредственное излучение из конденсатора. Второй вид потерь существенно меньше первого. В первом приближении можно записать зависимость заряда от времени пренебрегая потерями на излучение. Заряд конденсатора меняется по закону

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

где $C = \varepsilon_0 S / h$. Дипольный же момент конденсатора равен

$$d = qh = q_0 h \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Энергия дипольного излучения равна

$$\int_0^\infty dt \frac{\mu_0}{12\pi c}\left(\partial_t^2 d\right)^2 = \frac{\mu_0}{24\pi c}\frac{q_0^2 h^2}{R^3 C^3}.$$

Разбалловка

Получен закон изменения заряда конденсатора от времени	5 баллов
Записано выражение для дипольного момента	3 балла
Записано выражение для мощности излучения диполя	6 баллов
Получен ответ	6 баллов

Задача 4. Оценить поправку к энергии основного состояния атома водорода за счет конечного размера ядра (протона), который имеет размер $a = 0.84$ фм $\left(1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{м}\right)$.

Решение: Потенциал взаимодействия протона с электроном $-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ не работает внутри протона. Поэтому сдвиг энергии можно оценить, как интеграл

$$4\pi\int_0^a dr\; r^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi^2(r) \approx \frac{a^2}{2}\frac{e^2}{\varepsilon_0}\psi^2(0),$$

где $\psi = \left(\pi R^3\right)^{-1/2} \exp\left(-r/R\right)$ - волновая функция основного состояния атома водорода, а

$$R = \frac{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}{me^2}$$

- радиус атома водорода. Таким образом, сдвиг энергии оценивается, как

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{2\pi R^3}.$$

Разбалловка

Получена волновая функция основного состояния атома водорода	5 баллов
Явно сказано, что внутри протона потенциал взаимодействия конечен	3 балла
Записан искомый сдвиг энергии в виде интеграла	7 баллов
Получено выражение для дифференциала угловой скорости	5 баллов

Задача 5. Нелинейный осциллятор, характеризуемый смещением x, возбуждается внешней силой f, которая стоит в правой части уравнения

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x + \beta x^3 = f(t).$$

Найти амплитуду колебаний осциллятора, считая, что сила f ударно действует только в моменты времени $t = \pi n/\omega$ (n- целое число), причем в момент времени $t = 2\pi n/\omega$ сила

f придает осциллятору дополнительную скорость u, а в момент времени $t=(2n+1)\pi/\omega$ сила f придает дополнительную скорость $-u$. Нелинейность считать слабой.

Решение: В конечном итоге система выходит на периодический режим с периодом $2\pi/\omega$, который навязан внешней силой. В промежутке между ударами осциллятора движется свободно. В силу слабой нелинейности это движение может быть приближено гармонической зависимостью $x = a\sin(\omega t)$. За половину периода нелинейный член добавляет к скорости $a\omega\cos(\omega t)$ величину

$$-\int_0^{\pi/\omega} dt\, x^3 \approx \frac{4}{3}\frac{a^3}{\omega}.$$

Именно эту величину должен компенсировать внешний удар с тем, чтобы движение осциллятора было периодическим. Таким образом, мы находим

$$u = \frac{4}{3}\frac{a^3}{\omega},$$

Откуда и следует зависимость a и u, которая оказывается подчиняющейся закону $a \propto u^{1/3}$.

Разбалловка

Показано, что движение будет иметь периодический характер	4 балла
Произведены вычисления добавки к скорости за половину периода из-за влияния нелинейного члена	10 баллов
Получен ответ	6 баллов