Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

1. Обозначим через $\mathrm{tr}(B)$ – след матрицы B, а через $p_B(x) = \det(xI_n - B)$ – ее характеристический многочлен. Назовем матрицу B размера $n \times n$ с действительными элементами *дополняемой*, если найдутся n-мерные вектора $\bar{u}$ и $\bar{v}$ с действительными элементами такие, что для *дополненной* матрицы

$$A = \begin{pmatrix} B & \bar{u}^T \\ \bar{v} & \tau(n) \end{pmatrix}, \quad \tau(n) = \frac{\mathrm{tr}(B)}{n}$$

(здесь $\bar{u}^T$–вектор столбец) справедливо

$$p'_A(x) = np_B(x).$$

Назовем матрицу B *уникально дополняемой*, если найдется фиксированное число t, такое, что для любой *дополненной* матрицы A выполнено $\det(A) = t$. Является ли матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *уникально дополняемой*? Если да, то каково значение параметра t?

Решение

Так как матрица B имеет размер 2×2, то $n = 2$. Пусть $\bar{u} = (u_1, u_2)$ и $\bar{v} = (v_1, v_2)$. Тогда *дополненная* матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$p_A(x) = (x-1)^3 - (x-1)(u_1v_1 + u_2v_2).$$

Таким образом, условие $p'_A(x) = np_B(x) = 2p_B(x)$ эквивалентно

$$3(x-1)^2 - (u_1v_1 + u_2v_2) = 2(x-1)^2$$

и очевидно невыполнимо. Следовательно, матрица B не является даже *дополняемой*.

ОТВЕТ: матрица B не является ни *дополняемой*, ни *уникально дополняемой*.

Комментарий: Многие решили, что в условии $p'_A(x) = np_B(x)$ параметр n отвечает за размер матрицы A. В таком случае, мы получаем условие $p'_A(x) = 3p_B(x)$ из которого следует $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Следовательно,

$$\det(A) = 1 - (u_1v_1 + u_2v_2) = 1.$$

Соответственно, матрица B является *уникально дополняемой* с $t = 1$. Данное решение тоже засчитывалось как верное.

Критерии

- **10 баллов**: Полностью обоснованной решение с правильным ответом.
- **8-9 баллов**: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании. Например, не указано что B не является даже *дополняемой*.
- **6-7 баллов**: Указано что B является *дополняемой*, но не *уникально дополняемой*. Неверно найдена производная $p'_A(x)$.
- **4-5 баллов**: В ответе указано значение t, зависящее от векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$.
- **1-3 баллов**: Различные попытки решения.

2. Докажите сходимость ряда и найдите сумму

$$\frac{1}{1! + 2!} + \frac{1}{3! + 4!} + \frac{1}{5! + 6!} + \cdots$$

Решение

Сходимость можно показать любым признаком сходимости. Например, по признаку сравнения сходимость следует из неравенства

$$\frac{1}{(2n+1)! + (2n+2)!} \leq \frac{1}{2(2n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 1$$

и сходимости суммы бесконечной геометрической прогрессии с знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Вычисление суммы:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)! + (2n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!(2n+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+2}{(2n+3)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} \right) =$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Перегруппировка слагаемых корректна, т.к. все представленные ряды абсолютно сходятся.

Критерии

- **10 баллов**: Полностью обоснованной решение с правильным ответом.
- **8-9 баллов**: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании. Например, если не подчеркнута корректность группировки членов ряда.
- **6-7 баллов**: Правильно выполнены основные действия, но есть ошибки в выкладках или отсутствует обоснование выполненных действий. Например, сумма посчитана, но нет доказательства сходимости или есть ошибки при суммировании ряда.
- **4-5 баллов**: Задача решена лишь частично. Например, только доказана сходимость ряда.
- **1-3 баллов**: Различные попытки решения. Высказаны идеи, ведущие к решению.

3. Найдите площадь области, которая ограничена кривыми

$$x^2 + y^2 = 2(xy + x + y), \quad x + 2y = 4$$

Решение

Первое уравнение задает параболу:

$$x + y = \frac{1}{2}(x - y)^2.$$

Для приведения к каноническому виду проведем замену переменных:

$$y = a + b, \quad x = a - b.$$

Заметим, что данная замена переменных не сохраняет площадь, а якобиан замены $J = 2$, то есть $dxdy = 2dadb$.

В новых координатах получаем уравнения:

$$a = b^2, \quad 3a + b = 4.$$

Точки пересечения прямой и параболы на плоскости (a, b) отвечают $b = -4/3$ и $b = 1$. Таким образом, площадь данной области D равна:

$$S_D = \iint_D dxdy = 2\int_{-4/3}^{1} db \int_{(4-b)/3}^{b^2} da = 2\int_{-4/3}^{1} \left(\frac{4-b}{3} - b^2\right) db = \frac{343}{81}$$

Критерии

- **10 баллов**: Полностью обоснованное решение с правильным ответом.
- **8-9 баллов**: Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании или несущественные опечатки в работе.
- **6-7 баллов**: Правильно выполнены основные действия, но есть ошибки в выкладках. Например, сделана замена переменных и посчитан интеграл, но не учтен якобиан замены.
- **4-5 баллов**: Задача решена лишь частично. Например, площадь представлена в виде интеграла, но не посчитана.
- **1-3 баллов**: Различные попытки решения. Высказаны идеи, ведущие к решению.

4. Известно, что в (простом, неориентированном) графе G на 20 вершинах есть гамильтонов цикл. В G добавили еще одну вершину и соединили ее с какими-то

а) 10-ю;

б) 11-ю

другими. Верно ли, что в получившемся графе обязательно существует гамильтонов цикл?

Решение

а) Неверно. Рассмотрим цикл длины 20 (в котором есть гамильтонов цикл) и соединим новую вершину с «четными» вершинами цикла, т.е. через одну. Это граф двудольный, поскольку если присвоить новой вершине номер 21, нечетные вершины могут быть соединены только с четными и наоборот. Но в двудольном графе не может быть цикла нечетной длины, в частности гамильтонова (длины 21).

б) Верно. Поскольку вершина (обозначим ее y) соединена больше, чем с половиной вершин гамильтонова цикла в G, она соединена с какими-то двумя соседними вершинами этого цикла. Будем считать эти вершинами начальными вершинами гамильтонова цикла и пронумеруем вершины G «по циклу»: $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Тогда в получившемся графе цикл $x_1 y x_2 x_3 \ldots x_{20} x_1$ будет гамильтоновым.

Критерии

Общие:

- **7 баллов**: решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным.
- **5 баллов**: либо решена половина задачи, либо недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях).
- **3 балла**: задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению.

Конкретные:

- **5 баллов**: только один из двух пунктов.
- **0 баллов**: использовано достаточное условие гамильтоновости графа (теоремы Дирака, Оре, Хватала) или необходимое условие (связность, степени вершин не меньше 2), как критерий. Упомянутые теоремы никак решению не помогают.
- Не доказано, что в примере п. *а)* нет ГЦ — **вычитается 3 балла**.
- Рассуждение п. *а)* проводится не для графа-цикла, а для произвольного графа, для которого оно не верно — **вычитается 3 балла**.
- **0 баллов**: неверный ответ в *а)*, решение *б)* следует из *а)*.

5. Сколько можно придумать названий курсовых длиной 50 символов, таких, что в каждом должны встречаться буквы IT ровно 4 раза, а оставшиеся места должны быть заполнены произвольными русскими буквами (без пробелов)?

Решение

Сначала выясним, сколькими способами можно расставить IT. Обозначим через x_1 число букв до первого IT, x_2 — между первым и вторым,..., x_5 — после последнего IT. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50 - 8 = 42$ и любое решение полученного уравнения в целых неотрицательных числах задает расстановку IT. Число решений уравнения равно $\binom{46}{4}$ (метод точек и перегородок, 42 точки, 4 перегородки).

Для каждой из расстановок IT остается 42 места, на каждое из которых нужно поставить одну из 33 букв русского алфавита, что, по правилу произведения, можно сделать 33^{42} способами.

Итого, по правилу произведения, всего $\binom{46}{4} \cdot 33^{42} = 163185 \cdot 33^{42}$ названий курсовых.

Критерии

Общие:

- **7 баллов**: решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным.
- **5 баллов**: либо решена половина задачи, либо недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях).
- **3 балла**: задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению.

Конкретные:

- Неверно вычислено число способов расставить «IT» — **3 балла**.
- Ответ не доведен до формулы — **до 3 баллов**. Ответа в виде суммы или алгоритма недостаточно — такой ответ ничем не лучше условия.
- Переборное решение с ошибками при подсчете — **до 3 баллов**.
- Неверно вычислены оба множителя — **0 баллов**.
- Не объяснено число расстановок русских букв — **вычитается 3 балла**.
- Ошибки в подсчете числа расстановок русских букв — **до 5 баллов**.
- Недостаточно объяснено, почему используется метод точек и перегородок.— **вычитается 3 балла**.

6. Связный неориентированный граф с V $(V > 1)$ вершинами и E рёбрами задан списками смежности, то есть массивом из списков вершин-соседей для каждой из вершин графа.

(a) Предложите алгоритм, раскрашивающий не более $\left[\frac{V}{2}\right]$ вершин (где $[x]$ означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x) таким образом, чтобы у каждой не раскрашенной вершины был хотя бы один раскрашенный сосед. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

(b) Оптимизируйте алгоритм так, чтобы он выполнялась за $O(V + E)$ операций. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В обоих пунктах нельзя апеллировать к реализациям структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования.

Решение

Зафиксируем некоторую вершину u_0 и запустим из неё обход в ширину. При этом будем помечать вершины номерами «слоёв», в которых они находятся:

- вершину u_0 пометим числом 0, а всех её соседей — числом 1;
- при рассмотрении в ходе обхода в ширину вершины u, помеченной числом i, будем помечать всех её до сих пор не помеченных соседей числом $(i + 1)$.

Заметим, что по построению вершина u, помеченная числом i, непременно имеет соседа, помеченного числом $i - 1$.

Теперь рассмотрим два подмножества вершин: M_0 — вершины, помеченные чётными числами, M_1 — вершины, помеченные нечётными числами. Хотя бы одно из них содержит не более $\left[\frac{V}{2}\right]$ вершин. При этом каждая вершина из M_0 соединена ребром хотя бы с одной вершиной из M_1, а каждая вершина из M_1 соединена ребром с каждой вершиной из M_0. Таким образом, покрасив вершины из того подмножества, которое содержит не более $\left[\frac{V}{2}\right]$ вершин, мы получим требуемую раскраску.

Обход в ширину требует $O(V+E)$ операций и $O(V)$ дополнительной памяти; кроме того, $O(V)$ дополнительной памяти требуется для хранения чисел, которыми мы помечаем вершины. Пометки будут ставиться прямо в процессе обхода. Точно так же и мощности множеств M_0 и M_1 могут быть вычислены в процессе обхода. Финальная раскраска потребует $O(V)$ операций и $O(V)$ дополнительной памяти. Итого требуется $O(V + E)$ операций и $O(V)$ дополнительной памяти.

Критерии

- описан неверный алгоритм — **0 баллов** за всю задачу вне зависимости от остального;
- алгоритм верен, но не удовлетворяет ограничениям по числу операций, указанным в пункте (б) — **3 балла**;
- алгоритм верен и удовлетворяет ограничениям по числу операций — **8 баллов**;
- оценка числа операций — **1 балл**;
- оценка объёма дополнительной памяти — **1 балл**;
- не обоснована работоспособность алгоритма — **вычитается 3 балла**;
- не поясняется в явном виде, как вычисляются расстояния по рёбрам от исходной вершины до всех остальных — **вычитается 4 балла** из оценки за сам алгоритм;
- в решении используются конкретные реализации классов алгоритмов и структур данных из тех или иных языков программирования без пояснения того, какие именно представители этих классов имплементированы — **вычитается 2 балла**;
- алгоритм удовлетворяет ограничениям по числу операций лишь в среднем, но не в худшем случае — **вычитается 2 балла**.

7. Строка `t` называется суффиксом строки `s`, если `s` представима в виде `s = t’t`, где `t’` — некоторая строка, возможно, пустая.

Даны два массива `A[1:n]` и `B[1:m]` ($m \leqslant n$) строк длины, не превосходящей k. Предложите алгоритм, для каждого i находящий количество строк из массива `A`, для которых `B[i]` является суффиксом. Время работы алгоритма (то есть число операций) не должно превосходить $O(nk)$.

Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В данном задании нельзя апеллировать к реализациям типов данных, структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования. Все используемые алгоритмы должны быть подробно описаны.

Решение

Отсортируем массивы `A` и `B` по возрастанию относительно следующего (по сути лексикографического) порядка (через s_i и t_j обозначены отдельные символы):

$$s_a \ldots s_1 > t_b \ldots t_1, \text{ если } \exists i\text{:}$$
$$s_j \ldots s_1 = t_j \ldots t_1 \text{ для всех } j < i,$$
$$t_i = \varnothing \text{ или } s_i > t_i$$

Отсортировать `A` и `B` можно с помощью поразрядной сортировки за $O(nk)$ и $O(mk) = O(nk)$ операций соответственно. Поразрядная сортировка производится следующим образом. Сначала строки группируются по значениям самых правых элементов, затем внутри каждой из этих групп — по значениям второй справа и так далее. Чтобы исключить необходимость перестановки самих строк, мы можем завести дополнительные массивы `ind_A` и `ind_B` индексов ($O(n)$ дополнительной памяти) и работать с ними. Поразрядная сортировка будет выполнена за $O(nk)$ операций.

Теперь создадим массив `Ans[1:m]`, в который будет записан ответ на поставленный в задаче вопрос. Отметим, что для каждой из строк `B[i]` строки в отсортированном массиве `A` (точнее сказать, строки из `A`, индексированные индексами из `ind_A`), для которых `B[i]` будет суффиксом, стоят подряд: ведь любая строка с другим суффиксом будет строго меньше или строго больше любой из них в смысле определённого выше порядка. Поэтому массив `Ans[1:m]` может быть заполнен следующим образом. Мы инициализируем его нулями, а затем перебираем по возрастанию строки из `B` в порядке, определённом массивом `ind_B`; для очередной строки `B[ind_B[i]]` мы сдвигаемся по `ind_A` (индекс j), пока не встретим строку, большую или равную `B[ind_B[i]]`. Далее, пока `B[ind_B[i]]` является её суффиксом, мы увеличиваем `Ans[ind_B[i]]` на 1 и увеличиваем на 1 индекс j. Как только встречен элемент с суффиксом, строго большим `B[ind_B[i]]`, мы увеличиваем i на 1 и возвращаемся в начало цикла. Сравнение с суффиксом потребует $O(k)$ операций; сравнивать придётся $O(n)$ раз.

Итого потребуется $O(nk)$ операций.

Затраты дополнительной памяти следующие: $O(n)$ `ind_A` и `ind_B` $O(n)$.

Критерии

- описан неверный алгоритм — **0 баллов** за всю задачу вне зависимости от остального;
- алгоритм верен, но не удовлетворяет ограничениям по числу операций — **2 балла**;
- описывается только построение бора, без перехода к собственно решению задачи — **не более 3 баллов** за всю задачу;
- алгоритм верен и удовлетворяет ограничениям по числу операций — **8 баллов**;
- оценка числа операций — **1 балл**;
- оценка объёма дополнительной памяти — **1 балл**;
- не обоснована работоспособность алгоритма — **вычитается 3 балла**;
- решение использует сложные структуры данных без пояснений их внутренней структуры — **вычитается 2 балла**;
- в решении используются конкретные реализации классов алгоритмов и структур данных из тех или иных языков программирования без пояснения того, какие именно представители этих классов имплементированы — **вычитается 2 балла**;
- алгоритм может выдавать ошибку в случае, когда в массиве `A` есть строки, являющиеся суффиксами друг друга — **вычитается 6 баллов**.

8. Пусть дана выборка $(X_1, ..., X_n)$ независимых, одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет распределение с плотностью

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, \text{если } x \geq \theta; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия. Используйте статистику максимального правдоподобия для построения γ-доверительного интервала для θ.

Решение

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ реализация выборки $(X_1, \ldots, X_n)$, тогда функцией правдоподобия будет являться:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{I}_{\{x_i \geq \theta\}} = e^{n\theta - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_i \geq \theta\}}$$

Если $\exists i$ такое, что $x_i < \theta$, тогда $L(\theta) = 0$. Однако при $\theta \leq \min\limits_{i=1\ldots n} x_i$ функция правдоподобия $L(\theta)$ положительна и монотонно возрастает. Значит, оценка максимального правдоподобия: $\hat{\theta}_{MLE} = \min\limits_{i=1\ldots n} X_i = X_{(1)}$ - первая порядковая статистика.

Поскольку $\theta \leq \hat{\theta}_{MLE}$ с вероятностью 1 для истинного значения параметра θ, целесообразно искать доверительный интервал вида $[\hat{\theta}_{MLE} - z_\gamma; \hat{\theta}_{MLE}]$, где $z_\gamma > 0$ подобрано таким образом, чтобы:

$$\mathbb{P}\left\{\theta \in [\hat{\theta}_{MLE} - z_\gamma; \hat{\theta}_{MLE}]\right\} = \mathbb{P}\left\{\hat{\theta}_{MLE} \leq \theta + z_\gamma\right\} = \gamma$$

Чтобы явно выразить z_γ, найдём функцию распределения для $\hat{\theta}_{MLE}$:

$$F_{\hat{\theta}_{MLE}}(t) = \mathbb{P}\left\{\min_{i=1\ldots n} X_i \leq t\right\} = 1 - \mathbb{P}\{\forall \quad i = 1\ldots n: \quad X_i \geq t\} = 1 - (1 - F_\theta(t))^n$$

$$= 1 - \left(1 - (1 - e^{-(t-\theta)}\mathbb{I}_{\{t\geq\theta\}})\right)^n = 1 - e^{-n(t-\theta)}\mathbb{I}_{\{t\geq\theta\}}$$

Решая уравнение $F_{\hat{\theta}_{MLE}}(\theta + z_\gamma) = \gamma$, мы получаем:

$$e^{-nz_\gamma} = 1 - \gamma$$

$$z_\gamma = -\frac{\ln(1-\gamma)}{n}$$

Таким образом, γ-доверительным интервалом будет являться $[X_{(1)} + \frac{\ln(1-\gamma)}{n}, X_{(1)}]$.

Критерии

- за верно полученную и обоснованную оценку максимального правдоподобия — **5 баллов**;
- за верно полученный и обоснованный точный доверительный интервал — **5 баллов**;
- **вычитается 1 балл** из оценки за второй пункт, если имеется арифметическая ошибка, связанная с двусторонностью доверительного интервала;
- за продвижение по одному из пунктов задачи — **1-2 балла**.

9. Пусть дана выборка $(X_1, ..., X_n)$ независимых, одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет распределение с плотностью $g_\theta(x) = \theta p(x) + (1-\theta) q(x)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Пусть $p(x)$ — плотность стандартного нормального закона $\mathcal{N}(0, 1)$, а $q(x)$ — плотность равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$. Оцените параметр θ, исследуйте предложенную оценку на несмещенность и состоятельность.

Решение

Будем искать оценку $\hat{\theta}$ методом моментов. Поскольку обе плотности $p(x)$ и $q(x)$ задают симметричное распределение, то их линейная комбинация $g_\theta(x)$ тоже будет задавать симметричное распределение, поэтому $\mathbb{E}X = 0$ - не зависит от θ. Посчитаем второй момент $\mathbb{E}X^2$:

$$\mathbb{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_\theta(x)dx = \theta \mathbb{E}_{\xi\sim\mathcal{U}(-1,1)}\xi^2 + (1-\theta)\mathbb{E}_{\eta\sim\mathcal{N}(0,1)}\eta^2 = \theta\cdot\frac{1}{3} + (1-\theta)\cdot 1 = 1 - \frac{2}{3}\theta$$

Откуда получаем оценку $\hat{\theta}_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$.

Несмещенность следует из построения:

$$\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \frac{3}{2}\left(1 - \mathbb{E}X^2\right) = \theta$$

Чтобы проверить состоятельность, воспользуемся неравенством Чебышева и независимостью X_i:

$$\mathbb{P}\left\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\right\} \le \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{9}{4\varepsilon^2}Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2) \le \frac{9}{4\varepsilon^2 n}\mathbb{E}X^4 = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbb{E}X^4 < +\infty$, что можно проверить непосредственно. Таким образом, предложенная оценка несмещенная и состоятельная.

Критерии

- за предъявленную оценку при условии, что она является несмещенной или состоятельной — **6 баллов**;
- за верно обоснованную (не)смещенность — **2 балла**;
- за верно обоснованную состоятельность — **2 балла**;
- за продвижение по второму или третьему пунктам задачи — **1-2 балла**.

10. Перед Магнусом Карлсеном пустая шахматная доска 8 на 8 клеток и большой запас королей. По шахматным правилам, король ходит на одну клетку в любом направлении, в том числе и по диагонали.

Первого короля Магнус ставит на доску равновероятно на любое свободное место. Последующих королей Магнус ставит на доску по очереди, равновероятно на свободные места так, чтобы короли не били друг друга. Останавливается Магнус, когда ни одного нового короля невозможно разместить так, чтобы он не бил предыдущих.

Найдите ожидаемое количество королей, которых сможет расположить Магнус.

Решение

Задача является открытой и не имеет известного автору явного решения.

Критерии

- найдено наименьшее возможное количество королей — **3 балла**;
- найдено наибольшее возможное количество королей — **2 балла**;
- любая разумная нетривиальная идея — **3 балла**, в частности:
  – оценка среднего числа полей, съедаемого при выставлении нового короля.
  – оценка числа вариантов для каждого количества королей.