

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 7.1. (15 баллов) У Миши есть толстые и тонкие книги, при этом все толстые книги имеют одинаковую толщину, все тонкие — тоже. Три стопки, в каждой из которых по 5 книг, имеют толщину 11, 35 и 47 сантиметров. Чему может быть равна толщина стопки из 7 толстых и 3 тонких книг? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Задача 7.2. (15 баллов) Заяц и лиса играют в следующую игру. На рисунке справа поляны изображены кружками; поляны называются соседними, если они соединены дорожкой. Сначала заяц выбирает одну из 7 полян, потом лиса выбирает одну из оставшихся 6 полян. Затем заяц и лиса по очереди (начиная с зайца) переходят на одну из соседних полян. Если после чьего-то хода лиса и заяц окажутся на одной поляне, лиса съест зайца и победит. После того, как лиса сделает 100 ходов, она устанет, и тогда победит заяц. Лиса и заяц все время видят друг друга. У кого из них есть стратегия, позволяющая победить независимо от ходов противника?



Задача 7.3. (15 баллов) Дробь с натуральными числителем и знаменателем называется удачной, если она равна дроби с натуральными числителем и знаменателем, у которой числитель меньше знаменателя на 1. Например, дробь $4/6$ — удачная. Сколько существует удачных дробей со знаменателем 2025?

Задача 7.4. (15 баллов) Дан лист бумаги в форме прямоугольного треугольника площади 1. Докажите, что из него можно вырезать два прямоугольника суммарной площади $2/3$.

Задача 7.5. (20 баллов) Анастасия, Борис и Владлен познакомились с Георгием и захотели узнать, какая у него дата рождения. Георгий ответил, что его день, месяц и год рождения составляют одну из следующих дат:

11 января 2011 года	11 января 2012 года	13 января 2013 года	14 февраля 2014 года
11 февраля 2011 года	11 февраля 2012 года	13 февраля 2013 года	14 марта 2014 года
11 марта 2011 года	11 марта 2012 года	13 марта 2013 года	14 января 2015 года
12 февраля 2011 года	12 марта 2012 года	14 января 2014 года	14 марта 2015 года

Георгий сообщил Анастасии день своего рождения, Борису — месяц, Владлену — год. Георгий предложил им подумать и написать на бумажке ответ на вопрос: «Если двое других обменяются информацией, то смогут ли они по этим данным узнать дату моего рождения?». Спустя некоторое время Анастасия написала «точно смогут», Борис написал «точно не смогут», а Владлен написал «не знаю, может, смогут, а может и нет». Определите по этим данным день, месяц и год рождения Георгия.

Задача 7.6. (20 баллов) Король придумал испытание для двух мудрецов. Их отведут в разные комнаты и назовут им по натуральному числу от 1 до 16, при этом их числа будут отличаться либо на 5, либо на 11. После этого каждый мудрец пишет на своей карточке какое-то натуральное число, затем король относит карточку первого мудреца второму, а карточку второго — первому. При этом каждый мудрец платит королю количество монет, равное числу на его карточке. Мудрецы справятся с испытанием, если каждый, получив карточку от другого, сможет назвать число, которое назвали другому мудрецу. Они могут договориться о стратегии перед испытанием, зная его правила, но не зная чисел, которые им назовут. Какое наименьшее суммарное количество монет им придется потратить для гарантированного прохождения испытания?