

Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!

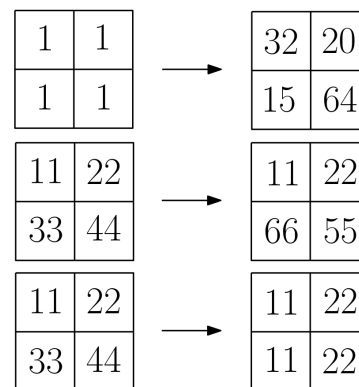


Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 8.1. (15 баллов) Натуральные числа от 1 до 50000 выписаны в строку по порядку. Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация из четырёх подряд идущих цифр 2, 0, 2, 5 (именно в таком порядке)?

Задача 8.2. (15 баллов) Квадрат состоит из четырёх ячеек. В каждой ячейке изначально записана единица. За один ход можно сделать одно из двух действий. Первое возможное действие: можно выбрать верхнюю или нижнюю строку и любые числа x и y , каждое из которых не меньше 1 и не больше 2, а затем умножить левое число в выбранной строке на x , а правое — на y (числа x и y не обязаны быть различными). Второе возможное действие: можно выбрать верхнюю или нижнюю строку и заменить ею оставшуюся. Какое минимальное число ходов потребуется, чтобы получить набор чисел 32, 20, 15, 64, записанный в ячейках так, как на верхнем рисунке?



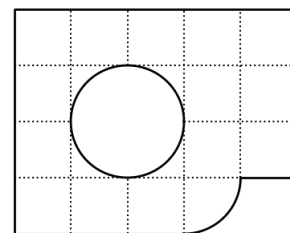
(Средний рисунок — пример первого действия: в нижней строке числа $a = 33$ и $b = 44$ умножены на числа $x = 2$ и $y = 5/4$. Нижний рисунок — пример второго действия: нижняя строка заменена на верхнюю.)

Задача 8.3. (15 баллов) Дан лист бумаги в форме треугольника площади 1. Верно ли, что из него обязательно можно вырезать два прямоугольника суммарной площади $2/3$?

Задача 8.4. В лаборатории 100 лампочек, к каждой из лампочек подключено по кнопке. Нажатие кнопки включает лампочку, с которой она соединена, если эта лампочка выключена, и выключает, если включена. За одну операцию можно нажать на две соседние кнопки. Изначально включено чётное число лампочек. Какое минимальное число операций потребуется, чтобы гарантированно выключить все лампочки, если кнопки расположены

- а) (6 баллов) в ряд;
- б) (9 баллов) по кругу?

Задача 8.5. (20 баллов) Из 18 квадратиков со стороной 1 и четвертинки круга радиуса 1 собрали фигуру, а затем из неё вырезали круг радиуса 1 (см. рисунок). Разрежьте полученную фигуру на три равные по форме и размеру части.



Задача 8.6. (20 баллов) К стене приколочена клетчатая доска размера $n \times n$. Сколькими способами можно раскрасить её клетки в белый и чёрный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было по две клетки каждого цвета?