Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!

Время выполнения заданий — 240 минут.
Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 9.1. (*15 баллов*) Саша придумал новое умножение: $a \diamond b = 1/b + 1/a$. Вычислите $(\ldots((1 \diamond 2) \diamond 3) \ldots) \diamond 2025$.

Задача 9.2. (*15 баллов*) Можно ли заполнить квадратную таблицу 36×36 действительными числами таким образом, чтобы в каждом квадрате 9×9 сумма чисел была не меньше 41, а в каждом прямоугольнике 8×10 (горизонтальном или вертикальном) сумма чисел не превосходила 40?

Задача 9.3. (*15 баллов*) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, оба степени n со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно n различных целых корней. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ чётны, а все корни многочлена $Q(x)$ нечётны. Докажите, что у многочлена $P(x) + Q(x)$ не может быть целых корней.

Задача 9.4. (*15 баллов*) К стене приколочена клетчатая доска размера $n\times n$. Сколькими способами можно раскрасить её клетки в белый и чёрный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было по две клетки каждого цвета?

Задача 9.5. (*20 баллов*) Покажите, как разрезать правильный треугольник на многоугольные куски, из которых можно сложить квадрат. Куски разрешается параллельно переносить или поворачивать на $180°$, а все другие преобразования запрещены.

Задача 9.6. (*20 баллов*) На клетчатой бумаге выбрали n подряд идущих по горизонтали клеток и отметили все их вершины (получили $2n+2$ отмеченных точек). Алиса и Боб играют в игру. Они ходят по очереди, и каждый в свой ход соединяет отрезком две отмеченные точки, соседние по горизонтали или вертикали. Первой ходит Алиса. Нельзя пропускать ход, нельзя повторять уже сделанный кем-то ход и нельзя использовать отмеченную точку, если она уже соединёна с двумя соседними. Боб выигрывает, если в какой-то момент игры из проведённых отрезков сложится прямоугольник. Если этого не произойдёт, то выигрывает Алиса. При каких значениях n у Алисы есть выигрышная стратегия?