Олимпиада «Высшая проба» проводится при поддержке Сбера, приветствуем участников соревнования! Поздравляем — ты являешься участником заключительного этапа олимпиады по направлению «Математика»! Сбер, как и ты, всегда стремится к амбициозным задачам и гениальным прорывам. Желаем тебе блистательной победы!

Время выполнения заданий — 240 минут.
Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 11.1. (*15 баллов*) Дан выпуклый многогранник. Разделим длину каждого ребра на сумму длин остальных рёбер и вычислим сумму полученных дробей. Докажите, что полученная сумма меньше 1,5.

Задача 11.2. (*15 баллов*) Многочлен $P(x)$ со старшим коэффициентом 1 имеет только целые коэффициенты, среди которых есть отрицательные. Обязательно ли многочлен $(P(x))^{2025}$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент?

Задача 11.3. (*15 баллов*) Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AF = CD$, $BC = EF$, $\angle A + \angle D = \angle B + \angle E = 180°$. Докажите, что $2CF \geqslant AB + DE$.

Задача 11.4. (*15 баллов*) В комплекте для сборки игрушечного поезда есть один локомотив (который всегда расположен спереди), $2n$ одинаковых красных вагонов и $3n$ одинаковых жёлтых вагонов. Назовём поезд длинным, если в нём есть хотя бы n вагонов (не считая локомотива). Сколько различных длинных поездов можно собрать, используя этот комплект? (Ответ должен быть дан в замкнутом виде: в ответе не должно быть сумм с переменным числом слагаемых, многоточий и т.д.)

Задача 11.5. (*20 баллов*) Саша и Гоша поставили 2025 фишек в клетки доски 1000×1000 и по очереди ходят. Саша своим ходом может взять две фишки, стоящие в левом верхнем и правом нижнем углу некоторого клетчатого прямоугольника (со сторонами больше 1), и поместить их по одной в две другие угловые клетки того же прямоугольника. Гоша своим ходом может передвинуть любую фишку либо вправо вниз, либо влево вверх по диагонали на любое число клеток. Они заканчивают ходить, когда кто-то не может сделать ход. Могут ли они ходить бесконечно?

Задача 11.6. (*20 баллов*) При каких $n \geqslant 2025$ существует такой набор из n прямоугольников, что из них можно собрать прямоугольник (без пустот и наложений), а из любого меньшего их подмножества, состоящего из хотя бы двух прямоугольников, — нельзя?