Решения задач

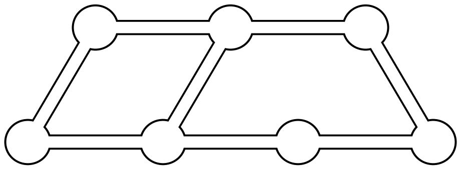
Задача 7.1. У Миши есть толстые и тонкие книги, при этом все толстые книги имеют одинаковую толщину, все тонкие — тоже. Три стопки, в каждой из которых по 5 книг, имеют толщину 11, 35 и 47 сантиметров. Чему может быть равна толщина стопки из 7 толстых и 3 тонких книг? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет. (*Георгий Караваев*)

Ответ. 106 сантиметров.
Решение. Разделим каждую толстую книгу на две части: одну тонкую книгу и одну дополнительную. Тогда в каждой стопке из 5 книг 5 тонких книг и не более 5 дополнительных. Первая и третья стопки отличаются по высоте на 36 сантиметров, а значит, толщина дополнительной книги не менее $\frac{36}{5} = 7.2$ сантиметров. С другой стороны, первая и вторая стопки отличаются на 12 сантиметров. Если эти 12 сантиметров состоят из хотя бы двух дополнительных книг, толщина каждой будет не более 6 сантиметров, что меньше 7.2 сантиметров. Значит, толщина дополнительной книги равна 12 сантиметрам. Заметим, что толщина первой стопки равна 11 сантиметрам, а значит, в ней нет ни одной дополнительной книги. Из этого следует, что толщина 5 тонких книг равна 11 сантиметрам. Осталось заметить, что стопка из 7 толстых книг и 3 тонких состоит из 10 тонких книг и 7 дополнительных, а значит, ее толщина равна $11 \cdot 2 + 7 \cdot 12 = 106$ сантиметрам.

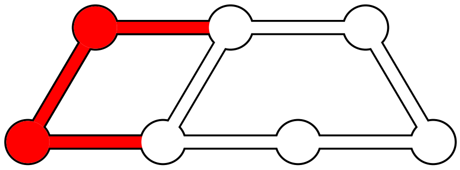
Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Обоснованно получен ответ 106 см, но не доказана единственность	$\pm$	7
Приведен только ответ	$\mp$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 7.2. Заяц и лиса играют в следующую игру. На рисунке справа поляны изображены кружками; поляны называются соседними, если они соединены дорожкой. Сначала заяц выбирает одну из 7 полян, потом лиса выбирает одну из оставшихся 6 полян. Затем заяц и лиса по очереди (начиная с зайца) переходят на одну из соседних полян. Если после чьего-то хода лиса и заяц окажутся на одной поляне, лиса съест зайца и победит. После того, как лиса сделает 100 ходов, она устанет, и тогда победит заяц. Лиса и заяц все время видят друг друга. У кого из них есть стратегия, позволяющая победить независимо от ходов противника? (*Георгий Караваев*)



Ответ. У зайца.
Решение. Предложим стратегию, которая позволит ему не попадаться лисе сколь угодно долго.



Белые поляны на рисунке выше будем называть *безопасными*, а красные — *опасными*. Пусть во время первого хода заяц выберет любую безопасную поляну. Лиса обязана выбрать другую поляну, поэтому она не сможет съесть зайца до его первого хода.

Пусть на каждом своем ходу заяц будет переходить на безопасную поляну, на которой нет лисы и до которой лиса не сможет добраться следующим ходом. Докажем, что такая поляна всегда найдется. От любой безопасной поляны отходит ровно две тропинки до других безопасных полян. Если лиса находится на безопасной поляне, зайцу нельзя ходить на поляну с лисой и соседние с ней, а значит, он может выбрать из двух оставшихся полян. Ясно, что на каких бы двух различных безопасных полянах ни находились заяц и лиса, подходящая поляна найдется. Если же лиса находится на опасной поляне, она может следующим ходом попасть только на одну безопасную поляну, а значит, заяц всегда сможет выбрать из двух безопасных полян ту, до которой лиса не сможет добраться своим следующим ходом.

Значит, заяц сможет на протяжении любого количества ходов убегать от лисы.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Не рассмотрено ни одного случая начального расположения игроков, в остальном решение верное	±	10
Описана выигрышная стратегия зайца, но нет доказательства	∓	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 7.3. Дробь с натуральными числителем и знаменателем называется удачной, если она равна дроби с натуральными числителем и знаменателем, у которой числитель меньше знаменателя на 1. Например, дробь 4/6 — удачная. Сколько существует удачных дробей со знаменателем 2025? (*Александр Штерн*)

Ответ. 14.

Решение. Всякая удачная дробь со знаменателем n обязана иметь вид $\dfrac{d(m-1)}{dm} = \dfrac{m-1}{m}$, где $dm = n$. Каждому делителю d знаменателя n, за исключением самого n, соответствует ровно одна такая дробь. Таким образом, задача эквивалентна нахождению $\tau(n) - 1$, где $\tau(n)$ обозначает количество делителей числа n. Как известно, если $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ — разложение числа n в произведение степеней простых, то $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. В нашем случае $2025 = 81 \cdot 25 = 3^4 \cdot 5^2$, значит, $\tau(2025) = 15$, откуда получаем ответ на задачу — 14.

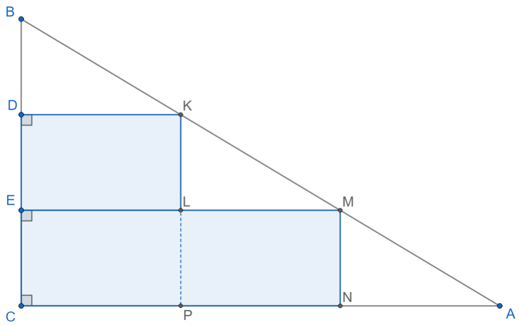
Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Получен ответ 15, так как не учтен случай, когда числитель дроби равен 0	$\pm$	12
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

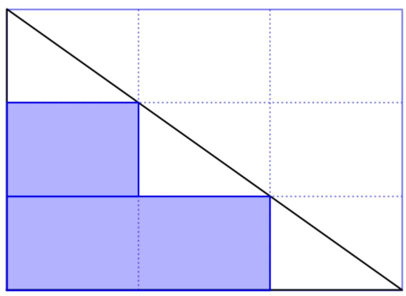
Задача 7.4. Имеется лист бумаги в форме прямоугольного треугольника площади 1. Докажите, что из него можно вырезать два прямоугольника суммарной площади 2/3.

(*Александр Юран*)

Решение. Докажем, что из любого прямоугольного треугольника площади 1 можно вырезать два прямоугольника с суммой площадей, равной 2/3. Отметим на катете BC точки D, E, делящие его на три равные по длине части, а на гипотенузе точки K, M, тоже делящие ее на три равные по длине части. Прямые DK и EM параллельны прямой AB. Пусть L — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую EM, а N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB. Докажем, что сумма площадей прямоугольников $EDKL$ и $CEMN$ равна 2/3 от площади треугольника ABC. Действительно, продлим мысленно прямую KL до пересечения с прямой AC в точке P. Тогда по теореме Фалеса AC разобьется на три равных отрезка. Каждый из трех прямоугольных треугольников BDK, KLM и MNA имеет катеты, в три раза меньшие соответствующих катетов треугольника ABC, поэтому площадь каждого из них в 9 раз меньше площади ABC, а в сумме три таких треугольника составят $3 \cdot 1/9 = 1/3$ от площади ABC. Оставшаяся площадь занята упомянутыми прямоугольниками, и она равна 2/3 от площади ABC.



По-другому вычислить сумму площадей этих прямоугольников можно так. Впишем треугольник в прямоугольник и разобъем этот прямоугольник на 9 одинаковых прямоугольничков. Тогда можно вырезать два синих прямоугольника, их суммарная площадь равна площади трех маленьких прямоугольничков, что составляет 2/3 от площади треугольника, равной площади 9/2 прямоугольничков.



Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Верное решение с недостаточным обоснованием построения	±	10
Не обосновано, что суммарная площадь прямоугольников равна 2/3 при обосновании построения конструкции	±	8
Предложена конструкция разрезания (чертеж) без доказательств	−.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 7.5. Анастасия, Борис и Владлен познакомились с Георгием и захотели узнать, какая у него дата рождения. Георгий ответил, что его день, месяц и год рождения составляют одну из следующих дат:

11 января 2011 года	11 января 2012 года	13 января 2013 года	14 февраля 2014 года
11 февраля 2011 года	11 февраля 2012 года	13 февраля 2013 года	14 марта 2014 года
11 марта 2011 года	11 марта 2012 года	13 марта 2013 года	14 января 2015 года
12 февраля 2011 года	12 марта 2012 года	14 января 2014 года	14 марта 2015 года

Георгий сообщил Анастасии день своего рождения, Борису — месяц, Владлену — год. Георгий предложил им подумать и написать на бумажке ответ на вопрос: «Если двое других обменяются информацией, то смогут ли они по этим данным узнать дату моего рождения?». Спустя некоторое время Анастасия написала «точно смогут», Борис написал «точно не смогут», а Владлен написал «не знаю, может, смогут, а может и нет». Определите по этим данным день, месяц и год рождения Георгия. (*Анастасия Оноприенко*, *Сергей Корнеев*)

Ответ. 14 января 2014 года.

Решение. Анастасия поняла, что Борис и Владлен, узнав месяц и год, смогут вычислить дату рождения (фактически, смогут узнать день). Отсюда имеем, что у Анастасии не могло быть записано число 11 или 12, потому что связка февраль + 2011 не позволяет определить день. Итак, мы выяснили, что день приходится на 13 или 14 число.

Борис понял, что связка день + год точно не позволяет узнать месяц. Отсюда имеем, что у Бориса не мог быть февраль ($12 + 2011$ однозначно позволяют узнать месяц) и март ($12 + 2012$ тоже дают месяц). Итак, Георгий родился в январе.

Владлен, зная год, не смог понять, дает ли связка день + месяц однозначно год (это значит, что какие-то варианты дают, а какие-то не дают). Исключается 2013 год (день + месяц всегда дают год) и 2015 год (день + месяц всегда не дают год). Остались 2011, 2012 и 2014 годы.

Собирая все вместе, видим, что осталась только одна дата: 14 января 2014 года.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	20
Верно определены два из трех параметров (день, месяц, год)	±	15
Верно определены ограничения на один из трех параметров (день, месяц, год) *Или* Верно найден ответ и доказано, что он удовлетворяет условию	∓	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 7.6. Король придумал испытание для двух мудрецов. Их отведут в разные комнаты и назовут им по натуральному числу от 1 до 16, при этом их числа будут отличаться либо на 5, либо на 11. После этого каждый мудрец пишет на своей карточке какое-то натуральное число, затем король относит карточку первого мудреца второму, а карточку второго — первому. При этом каждый мудрец платит королю количество монет, равное числу на его карточке. Мудрецы справятся с испытанием, если каждый, получив карточку от другого, сможет назвать число, которое назвали другому мудрецу. Они могут договориться о стратегии перед испытанием, зная его правила, но не зная чисел, которые им назовут. Какое наименьшее суммарное количество монет им придется потратить для гарантированного прохождения испытания? (*Анастасия Оноприенко*)

Ответ. 4 монеты.

Решение. Для начала покажем, как мудрецам справиться, используя не более 4 монет.

Расставим числа по кругу в следующем порядке: 1, 6, 11, 16, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12. Заметим, что два числа являются соседними тогда и только тогда, когда они отличаются на 5 или 11, а значит, каждый мудрец, зная свое число, должен угадать, какое из двух соседних получил его напарник.

Покрасим числа 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 и 14 в красный цвет, а остальные — в синий. Нетрудно заметить, что у каждого числа одно число из соседних — красное, а другое — синее. Тогда каждый мудрец может послать другому карточку с числом 1, если его число красное, и с числом 2, если оно синее: этой информации хватит для однозначного определения числа.

Теперь предположим, что есть стратегия, при которой хватит 3 монет. Если это так, каждый мудрец пишет либо 1, либо 2, причем оба мудреца не могут одновременно написать 2. Тогда если один из мудрецов отправляет другому число 2, он может быть уверен, что другой отправит ему 1, а значит, может узнать число другого мудреца самостоятельно. Однако выше было показано, что для любого числа от 1 до 16 найдется ровно два числа из этого же диапазона, отличающихся от него на 5 или 11, а значит, без дополнительной информации найти число другого мудреца не получится. Значит, такой стратегии нет, и 3 монет мудрецам может не хватить.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	20
Логика рассуждений и построения оценки и примера верная, но получен неверный ответ из-за включения 0 в множество натуральных чисел	+.	18
Приведена верная стратегия, но вывод о минимальной цене сделан неверно	±	15
Присутствуют попытки описания стратегии	∓	5
Присутствует вывод о минимальной цене, но нет стратегии	∓	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0