Решения задач

Задача 8.1. Натуральные числа от 1 до 50000 выписаны в строку по порядку. Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2025 (именно в таком порядке, подряд)? (*Михаил Игнатьев*)

Ответ. 27.
Решение. Каждая комбинация цифр $2, 0, 2, 5$ может быть получена двумя способами — либо в составе одного числа, либо на стыке двух различных чисел (очевидно, эти способы взаимоисключающие).

Первый способ реализуется числами вида $\overline{a2025}$, которых в нашем случае 5, и $\overline{2025b}$, которых 10. Пересечений между ними нет, поэтому первый способ дает 15 чисел.

Второй способ реализуется парами последовательных чисел, где первое число оканчивается на 20, а второе начинается на 25, и парами последовательных чисел, где первое оканчивается на 202, а второе начинается на 5 (очевидно, эти случаи также взаимоисключающие). В каждом из случаев ни одно из чисел не оканчивается на 9, поэтому оба числа пары начинаются на одни и те же цифры в обоих случаях. Последовательные числа с условием $\overline{\ldots 20} + 1 = \overline{25\ldots}$ должны иметь не менее четырех знаков. Четырехзначной парой является только $2520, 2521$. Среди пятизначных подходят только числа вида $\overline{25a20}$, которых 10. Наконец, остался вариант $\overline{\ldots 202} + 1 = \overline{5\ldots}$ — ему удовлетворяет только пара четырехзначных чисел $5202 + 1 = 5203$, так как знаков в таких числах должно быть не менее четырех, но такие числа с пятью и более знаками превосходят 50000. Таким образом, мы получаем $15 + 1 + 10 + 1 = 27$.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Неверно посчитано количество чисел в одном из разбиений	$+.$	13
Не учитывается один из случаев расположения цифр (неполный перебор)	$\mp$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 8.2. Квадрат состоит из четырех ячеек. В каждой строке изначально записана единица. За один ход можно сделать одно из двух действий. Первое возможное действие: можно выбрать верхнюю или нижнюю строку и любые числа x и y, каждое из которых не меньше 1 и не больше 2, а затем умножить левое число в выбранной строке на x, а правое — на y (числа x и y не обязаны быть различными). Второе возможное действие: можно выбрать верхнюю или нижнюю строку и заменить ею оставшуюся. Какое минимальное число ходов потребуется, чтобы получить набор чисел 32, 20, 15, 64, записанный в строках так, как на верхнем рисунке?

1	1	$\to$	32	20
1	1		15	64

11	22	$\to$	11	22
33	44		66	55

11	22	$\to$	11	22
33	44		11	22

(Средний рисунок — пример первого действия: в нижней строке числа $a = 33$ и $b = 44$ умножены на числа $x = 2$ и $y = 5/4$. Нижний рисунок — пример второго действия: нижняя строка заменена на верхнюю.) (*Сергей Корнеев*)

Ответ. 9 операций.

Решение. Пример. Начинаем действия над первой строкой: $1|1 \to 2|2$; $2|2 \to 4|4$; $4|4 \to 8|8$; копия из первой строки во вторую; $8|8 \to 16|16$; $16|16 \to 32|20$. Далее проводим действия над второй строкой: $8|8 \to 15|16$; $15|16 \to 15|32$; $15|32 \to 15|64$. Итого 9 операций.

Другой вариант. Начинаем действия над первой строкой: $1|1 \to 2|2$; $2|2 \to 4|4$; $4|4 \to 8|8$; $8|8 \to 15|16$; копия из первой строки во вторую; $15|16 \to 30|20$; $30|20 \to 32|20$. Далее проводим действия над второй строкой: $15|16 \to 15|32$; $15|32 \to 15|64$. Итого 9 операций.

Оценка. Для получения числа 64 во второй строке нужно не меньше 6 первых действий (умножений). Кроме того, если копирований не было, то необходимо еще не менее пяти умножений, чтобы получить 32, итого без копирований необходимо не менее 11 действий. Значит, копирований минимум одно, и действий уже 7. Покажем, что при этом можно обойтись не более чем одним копированием: если после копирования из первой строки во вторую происходит еще одно копирование из первой строки во вторую, то все промежуточные операции (сделанные во второй строке между этими копированиями) никак не влияют на конечный результат. Значит, можно удалить первое копирование и все эти операции — количество действий не увеличится. Если после копирования из первой строки во вторую происходит копирование из второй строки в первую, то все промежуточные операции можно сделать в первой строке (вместо второй), а потом сделать копирование из первой строки во вторую — конечный результат и количество действий не изменятся.

Вернемся к оценке. Рассмотрим момент когда мы сделали копирование. Тогда после копирования в первой ячейке каждой строки у нас число, не превосходящее 15, а во второй — не превосходящее 20. Пусть до копирования мы делаем k действий, после копирования в верхней строке делаем l действий, а в нижней — m. Тогда $k + m \geqslant 6$ (чтобы получить 64), а $l \geqslant 2$, так как из 15 необходимо получить 32. Итого действий должно быть не менее $k + l + m + 1 \geqslant 9$.

Критерии. Максимальный балл: 15.

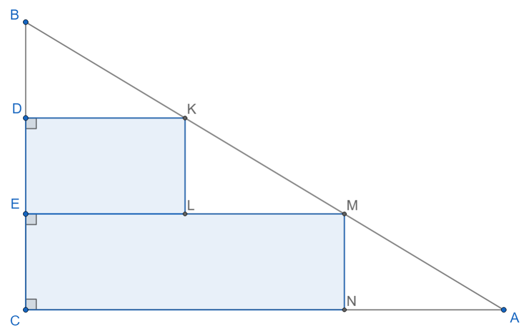
Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Приведен пример с оценкой только на количество действий для получения числа 64	+.	8
Приведен пример без оценки	∓	5
Приведена только оценка на количество действий для получения числа 64	−.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

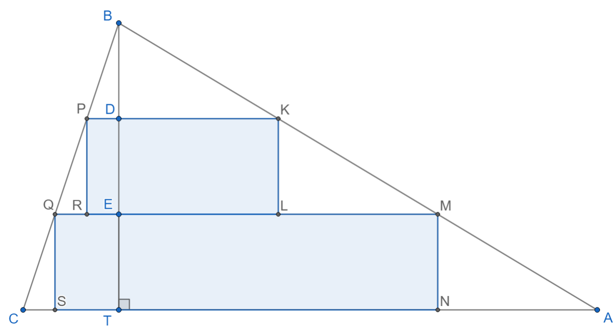
Задача 8.3. Дан лист бумаги в форме треугольника площади 1. Верно ли, что из него обязательно можно вырезать два прямоугольника суммарной площади 2/3?

(*Александр Юран*)

Ответ. Верно.

Решение. Докажем, что из любого треугольника площади 1 можно вырезать два прямоугольника с суммой площадей, равной 2/3. Вначале рассмотрим случай прямоугольного треугольника ABC. Отметим на катете BC точки D, E, делящие его на три равные по длине части, а на гипотенузе точки K, M, тоже делящие ее на три равные по длине части. Прямые DK и EM параллельны прямой AB. Пусть L — проекция точки K на прямую EM, а N — проекция точки M на прямую AB. Докажем, что сумма площадей прямоугольников $EDKL$ и $CEMN$ равна 2/3 от площади треугольника ABC. Действительно, каждый из трех прямоугольных треугольников BDK, KLM и MNA подобен исходному треугольнику ABC с коэффициентом подобия 1/3, поэтому, площадь каждого из них составляет 1/9 от площади ABC, а в сумме — 1/3 от площади ABC. Оставшаяся площадь занята упомянутыми прямоугольниками, и она равна 2/3 от площади ABC.





Пусть теперь ABC — произвольный треугольник. Проведем из вершины наибольшего угла B высоту BT (в остроугольном треугольнике можно из любого). Для каждого из образовавшихся прямоугольных треугольников BCT и ABT построим по два прямоугольника $EDKL, TEMN$ и $RPDE, SQET$ методом, описанным выше. При таком построении прямоугольники двух разных пар будут иметь общую сторону, поэтому их объединение также будет прямоугольником (т.е. $PKLR$ и $SQMN$ — прямоугольники). Суммарная площадь каждой пары прямоугольников $EDKL, TEMN$ и $RPDE, SQET$ составляет 2/3 от площади соответствующих прямоугольных треугольников, поэтому суммарная площадь их объединения — пары прямоугольников $PKLR$ и $SQMN$ — составляет 2/3 от площади треугольника ABC.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Верное решение, но не рассмотрен случай тупоугольного треугольника	$\pm$	12
Решение только для случая прямоугольного треугольника	$\mp$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 8.4. В лаборатории 100 лампочек, к каждой из лампочек подключено по кнопке. Нажатие кнопки включает лампочку, с которой она соединена, если эта лампочка выключена, и выключает, если включена. За одну операцию можно нажать на две соседние кнопки. Изначально включено четное число лампочек. Какое минимальное число операций потребуется, чтобы гарантированно выключить все лампочки, если кнопки расположены

а) в ряд;

б) по кругу? (*Сергей Корнеев*)

Ответ. а) 99; б) 50.

Решение. Заметим, что порядок нажатий не имеет значения, а также что дважды переключая одну и ту же пару лампочек, мы ничего не меняем. Значит, для каждой пары лампочек нам нужно решить, хотим ли мы ее переключить, или нет.

а) Назовем блоком n подряд идущих лампочек, среди которых горят только первая и последняя.

Пример: Пусть первая и последняя лампочки горят, а остальные — нет. Заметим, что чтобы погасить первую лампочку, нам нужно переключить первую лампочку и вторую. Тогда загорится вторая лампочка, и чтобы погасить ее, нам понадобится переключить вторую и третью (так как первую пару мы уже переключили). Таким образом нам придется переключить все пары лампочек, то есть, совершить 99 действий. Оценка: разобьем все лампочки на блоки (так как их четное число, нам удастся это сделать). Каждый блок можно погасить, переключив все пары в нем. Заметим, что пар в ряду всего 99, а значит, 99 действий точно хватит.

Ряд однозначно разбивается на блоки. Сумма длин блоков не превосходит 100, поэтому суммарная сложность не превосходит 99. Если весь ряд представляет из себя один блок, то 99 операций необходимо.

б) Пример: если горят все лампочки, то меньше 50 действий сделать не получится, так как за одно действие мы можем погасить не более двух лампочек.

Оценка: Из пункта а) мы знаем, что все лампочки точно можно погасить. Заметим, что если переключить все 100 пар лампочек, ничего не изменится. Значит, если мы можем погасить все лампочки за n действий, мы также можем сделать это и за $100-n$ действий, просто переключив все оставшиеся пары.

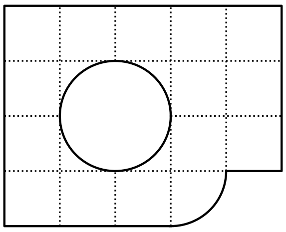
Критерии. Пункт а). Максимальный балл: 6.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	6
Доказана достаточность 99 действий	$\pm$	3
Приведен пример, показывающий необходимость 99 действий	$\pm$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

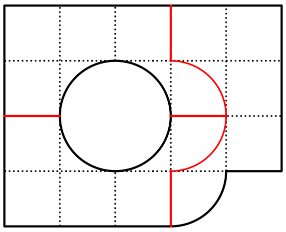
Пункт б). Максимальный балл: 9.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	9
Доказана достаточность 50 действий	$\pm$	5
Приведен пример, показывающий необходимость 50 действий	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 8.5. Из 18 квадратиков со стороной 1 и четвертинки круга радиуса 1 собрали фигуру, а затем из нее вырезали круг радиуса 1 (см. рисунок). Разрежьте полученную фигуру на три равные по форме и размеру части. (*Георгий Караваев*)



Решение. Решение представлено на рисунке.



Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	20
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 8.6. К стене приколочена клетчатая доска размера $n \times n$. Сколькими способами можно раскрасить ее клетки в белый и черный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было по две клетки каждого цвета? (*Сергей Корнеев*)

Ответ. $2^{n+1} - 2$.

Решение. Назовем раскраску горизонтальной, если во всех строках цвета чередуются, аналогично, назовем раскраску вертикальной, если во всех столбцах цвета чередуются. Назовем раскраску хорошей, если она удовлетворяет условию задачи. Ясно, что две шахматные раскраски, и только они, являются одновременно горизонтальными и вертикальными. Если в хорошей раскраске две соседние по горизонтали (соответственно, вертикали) клетки покрашены в один цвет, то такая раскраска будет вертикальной (соответственно, горизонтальной): две соседние клетки одного цвета по горизонтали однозначно задают чередующуюся раскраску столбцов, в соседнем столбце цвета тоже должны чередоваться, и т.д. Если же в хорошей раскраске такого нет, то она шахматная. Значит, любая хорошая раскраска является горизонтальной или вертикальной. Получаем, что количество хороших раскрасок равно количеству горизонтальных раскрасок плюс количество вертикальных раскрасок минус количество шахматных раскрасок. Горизонтальных раскрасок будет 2^n, потому что такая раскраска однозначно задается раскрашиванием первого столбца. В нем n клеток, каждую можно покрасить двумя способами. Аналогично считается количество вертикальных раскрасок. В итоге получаем $2^{n+1} - 2$.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	20
Задача решена верно, но не учтены шахматные раскраски	$\pm$	16
Раскраски посчитаны только по столбцу или строке; отсутствует доказательство того, что других вариантов нет	$\mp$	12
Есть рассуждения о том что две соседние по горизонтали (вертикали) клетки однозначно задают раскраску по двум столбцам (строкам)	$-.$	8
Снижение баллов за каждый нерассмотренный случай		-4
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0