Решения задач

Задача 9.1. Саша придумал новое умножение: $a \diamond b = 1/b + 1/a$. Вычислите

$$(\ldots((1 \diamond 2) \diamond 3)\ldots) \diamond 2025.$$

(*Александр Штерн*)

Ответ. 1.

Решение. Обозначим $f(n) = (\ldots((1 \diamond 2) \diamond 3) \diamond \ldots) \diamond n, n \geqslant 2$. Докажем по индукции, что $f(n) = 1$, если n нечетное, и $f(n) = 1 + 1/n$, если n четное. База: $1 \diamond 2 = 1/1 + 1/2 = 3/2$, $(1 \diamond 2) \diamond 3 = 3/2 \diamond 3 = 2/3 + 1/3 = 1$. Пусть предположение индукции верно, докажем переход: $f(2k+1) = f(2k) \diamond (2k+1) = \dfrac{1}{f(2k)} + \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} + \dfrac{1}{2k+1} = 1$ для нечетного $2k+1$. Для четного: $f(2k+2) = f(2k+1) \diamond (2k+2) = \dfrac{1}{f(2k+1)} + \dfrac{1}{2k+2} = 1 + \dfrac{1}{2k+2}$. Формула доказана. Поэтому $f(2025) = 1$.

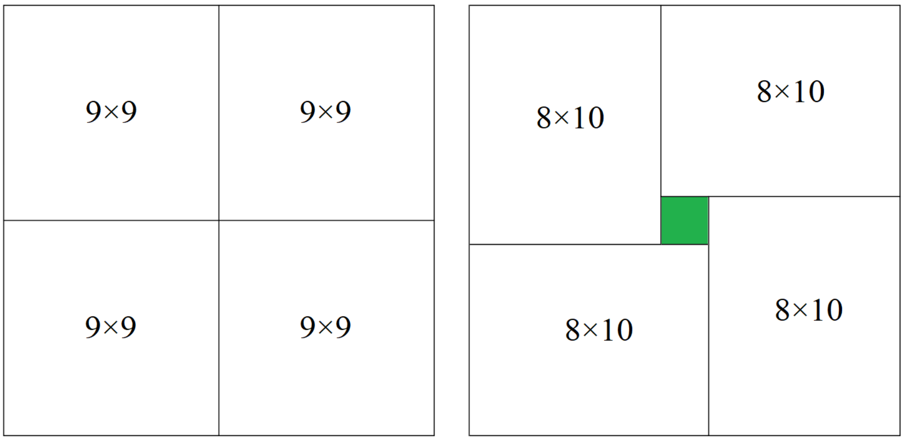
Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Присутствует мелкая неточность или арифметическая ошибка	$+.$	15
Не проверена база индукции при доказательстве цикла/при свертке не указано что операций четное число	$\pm$	12
Цикл найден, но не доказан в общем виде	$\mp$	7
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

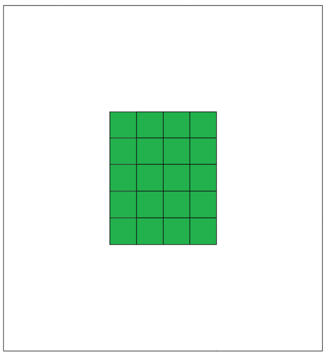
Задача 9.2. Можно ли заполнить квадратную таблицу 36×36 действительными числами таким образом, чтобы в каждом квадрате 9×9 сумма чисел была не меньше 41, а в каждом прямоугольнике 8×10 (горизонтальном или вертикальном) сумма чисел не превосходила 40? (*Марк Алексеев*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что нам удалось заполнить таблицу требуемым образом. Рассмотрим квадрат размера 18×18. Каждый такой квадрат, с одной стороны, может быть разрезан на четыре квадрата 9×9, с другой стороны, он же может быть разрезан на четыре прямоугольника 8×10 (два горизонтальных, два вертикальных) и центральный квадратик 2×2 (см. рис.).



Возьмем произвольный квадрат 18×18. По предположению, сумма чисел в нем не меньше, чем $4\cdot 41$, при этом сумма чисел в четырех прямоугольниках 8×10 не больше $4\cdot 40$, поэтому сумма чисел в квадратике 2×2 не меньше $4\cdot 41-4\cdot 40=4$. Теперь возьмем квадрат 18×18, левый верхний угол которого совпадает с левым верхним углом всей таблицы, и рассмотрим 20 квадратов 18×18, каждый из которых получен сдвигом рассматриваемого квадрата на $2a$ клеточек вправо и $2b$ клеточек вниз, где $0\leqslant a\leqslant 3$, $0\leqslant b\leqslant 4$ — целые числа. Тогда центральные квадратики 2×2 всех 20 таких квадратов образуют прямоугольник 8×10, в котором сумма чисел не меньше $4\cdot 20>40$, что противоречит предположению.



Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 9.3. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, оба степени n со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно n различных целых корней. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ четны, а все корни многочлена $Q(x)$ нечетны. Докажите, что у многочлена $P(x)+Q(x)$ не может быть целых корней. (*Матвей Никольский*)

Решение. Пусть четные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни многочлена $P(x)$, а нечетные числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — корни многочлена $Q(x)$. Тогда $P(x)+Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) + (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$. Подставим в $P(x)+Q(x)$ целое число k. Возможны два случая: k четно и k нечетно. В первом случае $P(k) = (k-a_1)(k-a_2)\ldots(k-a_n)$ четно как произведение четных чисел, а $Q(k) = (k-b_1)(k-b_2)\ldots(k-b_n)$ нечетно как произведение нечетных чисел, поэтому, $P(k)+Q(k)$ нечетно. Аналогично в случае нечетного k $P(k)$ нечетно как произведение нечетных чисел, а $Q(k)$ четно как произведение четных чисел, и $P(k)+Q(k)$ опять нечетно. Таким образом, $P(k)+Q(k)$ нечетно при любом целом k, и поэтому не может быть равно нулю. Значит, $P(x)+Q(x)$ не имеет целых корней.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Частично отсутствует вывод (что целых корней нет или не может быть)	+.	14
Присутствуют рассуждения про четность коэффициентов многочленов, есть недочеты *Или* Сделан необоснованный вывод про знак свободного члена с последующим использованием этого факта, но он не влияет на ход решения *Или* Полностью отсутствует вывод «в силу нечетности не может быть нуля» и дальнейшие рассуждения	±	9
Присутствуют рассуждения про четность коэффициентов многочленов, но решение к доказательству не приводит *Или* Сделан необоснованный вывод про знак свободного члена с последующем использованием этого факта, и он влияет на ход решения	∓	6
Рассуждения о коэффициентах или свободных членах, не приводящие к доказательству	−.	3
Рассмотрен только частный случай; переписанное условие; отсутствие иных содержательных рассуждений	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 9.4. К стене приколочена клетчатая доска размера $n \times n$. Сколькими способами можно раскрасить ее клетки в белый и черный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было по две клетки каждого цвета? (*Сергей Корнеев*)

Ответ. $2^{n+1} - 2$.

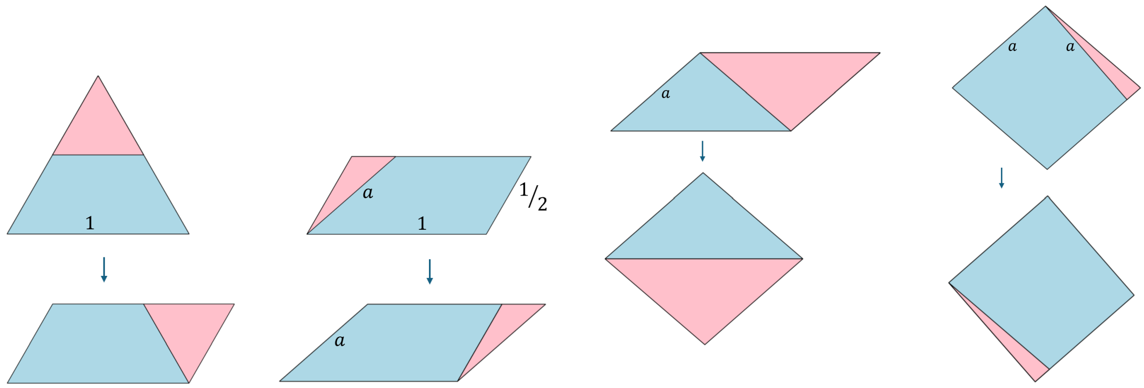
Решение. Назовем раскраску горизонтальной, если во всех строках цвета чередуются, аналогично, назовем раскраску вертикальной, если во всех столбцах цвета чередуются. Назовем раскраску хорошей, если она удовлетворяет условию задачи. Ясно, что две шахматные раскраски, и только они, являются одновременно горизонтальными и вертикальными. Если в хорошей раскраске две соседние по горизонтали (соответственно, вертикали) клетки покрашены в один цвет, то такая раскраска будет вертикальной (соответственно, горизонтальной): две соседние клетки одного цвета по горизонтали однозначно задают чередующуюся раскраску столбцов, в соседнем столбце цвета тоже должны чередоваться, и т.д. Если же в хорошей раскраске такого нет, то она шахматная. Значит, любая хорошая раскраска является горизонтальной или вертикальной. Получаем, что количество хороших раскрасок равно количеству горизонтальных раскрасок плюс количество вертикальных раскрасок минус количество шахматных раскрасок. Горизонтальных раскрасок будет 2^n, потому что такая раскраска однозначно задается раскрашиванием первого столбца. В нем n клеток, каждую можно покрасить двумя способами. Аналогично считается количество вертикальных раскрасок. В итоге получаем $2^{n+1} - 2$.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Задача решена верно, но не учтены шахматные раскраски	$\pm$	12
Раскраски посчитаны только по столбцу или строке; отсутствует доказательство того, что других вариантов нет	$\mp$	6
Есть рассуждения о том что две соседние по горизонтали (вертикали) клетки однозначно задают раскраску по двум столбцам (строкам)	$-.$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 9.5. Покажите, как разрезать правильный треугольник на многоугольные куски, из которых можно сложить квадрат. Куски разрешается параллельно переносить или поворачивать на 180°, а все другие преобразования запрещены. (*Владлен Тиморин*)

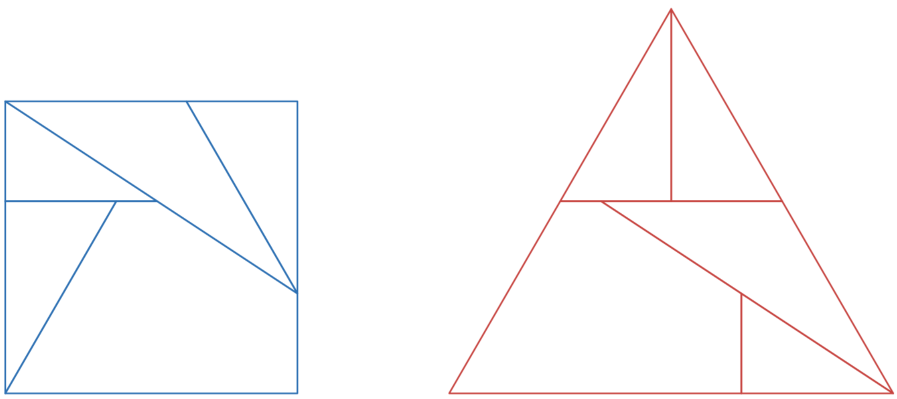
Решение. Пример 1. На рисунке показана последовательность элементарных операций, переводящая равносторонний треугольник со стороной 1 и площадью $A = \sqrt{3}/4$ в квадрат той же площади.



Сторона квадрата в этом случае имеет длину $a = \sqrt{A}$. Каждая операция состоит в отрезании от имеющейся фигуры треугольника и приклеивании его копии с другой стороны; при этом копия отличается от оригинала либо параллельным переносом, либо поворотом на 180 градусов. Осуществимость всех указанных операций подтверждается элементарными неравенствами, например, второй столбец осуществим в силу неравенств $1/2 < a < 1$. Заметим, что все операции, кроме самой первой, осуществляются только параллельными переносами.

Пример 2. (Разрезание Дьюдени.)

Пример 3. Здесь одна сторона треугольника параллельна одной из сторон квадрата.



Примеры 2 и 3 приведены здесь без доказательств, которые обязаны присутствовать в верном решении.

Замечание. Можно доказать, что если запретить повороты совсем (даже на 180°), то правильный треугольник не получится пересобрать в квадрат (и вообще, ни в какой параллелограмм).

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	20
Построен параллелограмм с углом 60° (одна сторона в два раза больше другой)	–.	4
Использовались повороты на 90°	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 9.6. На клетчатой бумаге выбрали n подряд идущих по горизонтали клеток и отметили все их вершины (получили $2n+2$ отмеченных точек). Алиса и Боб играют в игру. Они ходят по очереди, и каждый в свой ход соединяет отрезком две отмеченные точки, соседние по горизонтали или вертикали. Первой ходит Алиса. Нельзя пропускать ход, нельзя повторять уже сделанный кем-то ход и нельзя использовать отмеченную точку, если она уже соединена с двумя соседними. Боб выигрывает, если в какой-то момент игры из проведенных отрезков сложится прямоугольник. Если этого не произойдет, то выигрывает Алиса. При каких значениях n у Алисы есть выигрышная стратегия? (*Сергей Корнеев*)

Ответ. Только при $n = 2$.
Решение. Пусть ℓ — горизонтальная прямая, делящая исходный клетчатый прямоугольник, узлы которого отмечены, на две равные части. Далее под симметрией будем понимать симметрию относительно ℓ, если не оговорено иное.

Вначале рассмотрим случай $n \geqslant 3$. Если в какой-то момент игры картинка симметрична и на ней проведены хотя бы два горизонтальных отрезка, то Боб может выиграть независимо от того, чей сейчас ход (будем называть это «выигрышной позицией»). Действительно, если сейчас ход Боба, то он может собрать «стакан», соединив края двух симметричных горизонтальных отрезков. Следующим ходом он замыкает стакан в прямоугольник, если может. Если же Алиса увеличивает стенку стакана, то Боб симметрично увеличивает другую стенку. Если же сейчас ход Алисы и она нарушает симметрию, проводя горизонтальный отрезок, то Боб проводит отрезок, симметричный отрезку Алисы. С учетом симметрии горизонтальные ходы у Алисы рано или поздно закончатся, и она будет вынуждена сделать вертикальный ход, что приведет к победе Боба.

Таким образом, наличие двух горизонтальных отрезков в симметричной позиции всегда приводит к победе Боба. Покажем, что Боб всегда сможет создать такую позицию. Если Алиса первым ходом проводит горизонтальный отрезок, то Боб делает симметричный ход, сразу приводя игру к выигрышной позиции. Если Алиса первым ходом проводит вертикальный отрезок, то Бобу нужно провести горизонтальный отрезок, который не имеет общих точек с отрезком Алисы, и дальше следовать следующей стратегии.
1. Если Алиса делает любой горизонтальный ход, не симметричный первому ходу Боба, то Боб делает ход, симметричный ходу Алисы. Рано или поздно такие ходы у Алисы закончатся.
2. Если Алиса делает ход, симметричный первому ходу Боба, то сразу получается выигрышная позиция.
3. Если Алиса делает вертикальный ход, то Боб делает ход, симметричный своему первому ходу, приводя игру к выигрышной позиции.
Боб своим первым ходом всегда может провести отрезок, который не касается отрезка Алисы, если $n \geqslant 3$.

Остались случаи $n = 1$ и $n = 2$. Если $n = 1$, то Боб очевидно выигрывает. В случае $n = 2$ у Алисы есть выигрышная стратегия: провести центральный вертикальный отрезок, а дальше делать ходы, симметричные ходам Боба относительно центра прямоугольника.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	20
Доказано для всех $n \geqslant 3$, не рассмотрены случаи $n = 1, n = 2$	$\pm$	15
Доказано для четных $n \geqslant 4$, другие случаи не рассмотрены	$\mp$	5
Доказано, что Алиса побеждает при $n = 2$, других продвижений нет	$-.$	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0