Решения задач

Задача 11.1. Дан выпуклый многогранник. Разделим длину каждого ребра на сумму длин остальных ребер и вычислим сумму полученных дробей. Докажите, что полученная сумма меньше 1,5. (*Марк Алексеев*)

Решение. Обозначим за $l_1, l_2, \ldots, l_n$ длины ребер многогранника, а за L — сумму длин всех ребер многогранника. Каждое ребро многогранника входит в две грани, которые являются многоугольниками. Отсюда следует, что для каждого ребра имеется как минимум два непересекающихся набора других ребер, длины которых в сумме больше, чем длина этого ребра (по неравенству многоугольника). Это значит, что длина каждого ребра многогранника всегда меньше, чем $L/3$, а значит, сумма длин всех ребер, кроме одного, всегда больше, чем $2L/3$. Теперь запишем сумму дробей из условия и заменим в каждой дроби знаменатель на $2L/3$ — от этого сумма строго увеличится, но станет равной $\frac{l_1}{2L/3} + \frac{l_2}{2L/3} + \ldots + \frac{l_n}{2L/3} = \frac{L}{2L/3} = 3/2$.

Замечание. Число $3/2$ нельзя уменьшить, как показывает пример (один из возможных) правильной треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной t, и боковыми ребрами равными 1: уменьшая $t \to 0$, мы будем получать суммы, сколь угодно близкие к $3/2$.

Комментарий. Для произвольных положительных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$, не являющихся длинами ребер многогранника, неравенство неверно — например, возьмем $l_1 = l_2 = \ldots = l_{n-1} = t, l_n = M$, затем устремим $t \to 0$, и тогда сумма из условия будет не меньше, чем $\frac{M}{(n-1)t}$, которое может быть сколь угодно большим при любом фиксированном n. Несмотря на это, многие участники олимпиады доказывали неравенство, не используя условие о многограннике. Все такие решения были оценены в 0 баллов.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное доказательство	+	15
Доказано, что длина ребра строго меньше трети суммы длин всех ребер	±	10
Решение не использует условие о многограннике	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 11.2. Многочлен $P(x)$ со старшим коэффициентом 1 имеет только целые коэффициенты, среди которых есть отрицательные. Обязательно ли многочлен $(P(x))^{2025}$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент? (*Марк Алексеев*)

Ответ. Не обязательно.

Решение. Покажем несколько примеров приведенных многочленов с целыми коэффициентами, среди которых есть отрицательные, у которых 2025-я степень не имеет отрицательных коэффициентов.

Пример 1. Рассмотрим многочлен $Q(x) = x^4 + x^3 - x^2/a + x + 1$, где a — достаточно большое натуральное число (на самом деле, достаточно взять $a \geqslant 3$). Проверим, что $(Q(x))^2$ и $(Q(x))^3$ имеют только положительные коэффициенты:

$(Q(x))^2 = x^8 + 2x^7 + (1-2/a)x^6 + (2-2/a)x^5 + (1/a^2+4)x^4 + (2-2/a)x^3 + (1-2/a)x^2) + 2x + 1$,

$(Q(x))^3 = x^{12} + 3x^{11} + (3-3/a)x^{10} + (4-6/a)x^9 + (9+3/a^2-3/a)x^8 + (9+3/a^2-6/a)x^7 + (6-1/a^3+12/a^2)x^6 + (9+3/a^2-6/a)x^5 + (9+3/a^2-3/a)x^4 + (4-6/a)x^3 + (3-3/a)x^2 + 3x + 1$.

Теперь положим $P(x) = x^5 + aQ(x)$. Этот многочлен приведенный, имеет только целые коэффициенты и один отрицательный. Покажем, что $(P(x))^2$ и $(P(x))^3$ тоже имеют только неотрицательные коэффициенты:

$(P(x))^2 = x^{10} + 2ax^5Q(x) + a^2(Q(x))^2$. Единственный отрицательный коэффициент в этой сумме есть только у $2ax^5Q(x)$ при x^7, он равен -2, но коэффициент при x^7 у $a^2(Q(x))^2$ равен $2a^2 > 2$, поэтому, вся сумма не имеет отрицательных коэффициентов.

$(P(x))^3 = x^{15} + 3ax^{10}Q(x) + 3a^2x^5(Q(x))^2 + a^3(Q(x))^3$. Единственный отрицательный коэффициент в этой сумме есть только у $3ax^{10}Q(x)$ при x^{12}, и он равен -3, но коэффициент при x^{12} уже в $a^3(Q(x))^3$ равен $a^3 > 3$, поэтому вся сумма гарантированно не имеет отрицательных коэффициентов. Поэтому $(P(x))^2$ и $(P(x))^3$ не имеют отрицательных коэффициентов, а значит и $(P(x))^n$ для всех бо́льших n не имеет отрицательных коэффициентов, так как любое число, большее 3, представимо в виде суммы двоек и троек.

Идея этого примера такова: рассмотрим многочлен $x^4 + x^3 + x + 1$. Его любая степень имеет положительные коэффициенты (нет нулевых). «Пошевелив» (на данный момент нулевой) коэффициент при x^2 в отрицательную сторону мы получим многочлен, коэффициенты степеней которого «мало» отличаются от коэффициентов тех же степеней многочлена $x^4 + x^3 + x + 1$, так как коэффициенты его степеней $(x^4 + x^3 - tx^2 + x + 1)^n$ являются непрерывными функциями от параметра t, поэтому, при малом $t = 1/a$ степени многочлена $x^4 + x^3 - x^2/a + x + 1$ будут иметь только положительные коэффициенты. На основе этого легко построить приведенный целочисленный многочлен, у которого все степени имеют только положительные коэффициенты. Аналогично подходит многочлен $x^k + x^{k-1} + \ldots + 0 \cdot x^l + \ldots + x + 1$ и его шевеления $x^k + x^{k-1} + \ldots - x^l/a + \ldots + x + 1$ для всех $2 \leqslant l \leqslant k-2$ при $k \geqslant 4$, тогда $P(x) = x^{k+1} + a(x^k + x^{k-1} + \ldots - x^l/a + \ldots + x + 1)$ дает нам нужный пример многочлена $P(x)$, имеющий произвольную степень $k + 1 \geqslant 5$.

Пример 2. Рассмотрим $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2$. Тогда многочлены $(P(x))^2$ и $(P(x))^3$ тоже имеют только положительные коэффициенты, а значит, и для всех $n > 3$ многочлен $(P(x))^n$ будет иметь только положительные коэффициенты. Аналогичные примеры можно построить для любой степени, не меньшей $4 : P(x) = x^d + 3x^{d-1} + \ldots - x^l + \ldots + 3x + 2$ (почти все коэффициенты равны 3, $2 \leqslant l \leqslant d-2$). В этом примере минимальная степень многочлена равна 4.

Пример 3. Пусть $d \geqslant 6$. Рассмотрим $P(x) = x^d + x^{d-1} + \ldots + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$ (все коэффициенты, кроме одного, равны 1). Тогда $(P(x))^2$ и $(P(x))^5$ не имеют отрицательных коэффициентов, а значит, и для всех $n > 5$ многочлен $(P(x))^n$ не будет иметь отрицательных коэффициентов. В этом примере модули коэффициентов не превосходят 1.

Замечания. 1. Данные примеры показывают, что для любого $d \geqslant 4$ существует приведенный целочисленный многочлен степени d с отрицательным коэффициентом, старшие степени которого не имеют отрицательных коэффициентов. Можно доказать, что если квадратичный или кубический многочлен имеет отрицательные коэффициенты, то его

степени тоже будут иметь отрицательные коэффициенты.
2. Для всякого $n > 3$ можно построить целочисленный приведенный многочлен $P(x)$, степени которого вплоть до $n-1$ имеют отрицательные коэффициенты, а начиная с n не имеют отрицательных коэффициентов.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Приведен верный пример, его корректность доказана без ошибок	$+$	15
Приведен верный пример, доказательство в целом верно, но в нем допущены неточности *Или* Пример построен с ошибкой, однако из доказательства легко восстанавливается верный пример, само доказательство верно *Или* Приведен верный пример, в доказательстве корректности пропущены некоторые шаги, но детали доказательства легко восстановить	$\pm$	10
Приведен верный пример, в доказательстве корректности пропущены некоторые шаги, восстановление деталей доказательства нетривиально *Или* Доказательство корректности содержит грубые ошибки (например, основывалось на неверных утверждениях)	$\mp$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 11.3. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AF = CD$, $BC = EF$, $\angle A + \angle D = \angle B + \angle E = 180^\circ$. Докажите, что $2CF \geqslant AB + DE$. (*Егор Бакаев*)

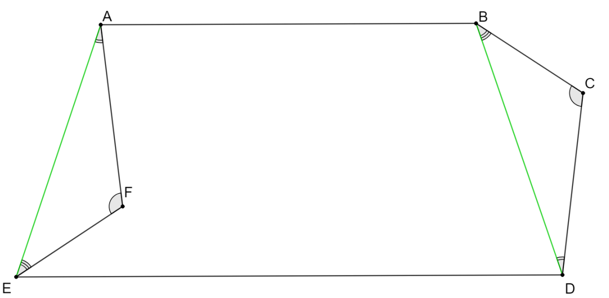
Решение. Вначале покажем, что сумма углов любого, даже невыпуклого, n-угольника равна $180(n-2)$ градусов (этим фактом можно было пользоваться без доказательства). Для этого покажем, что каждый многоугольник (понимаемый как область, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной, никакие три последовательные вершины которой не лежат на одной прямой) может быть разбит на $n-2$ треугольников непересекающимися диагоналями. Доказательство проводится индукцией по n, с базой в очевидном случае $n = 4$ и с обоснованием существования внутренней диагонали, что совершает индукционный переход, так как каждый многоугольник может быть разрезан на два многоугольника с меньшим числом вершин некоторой диагональю.

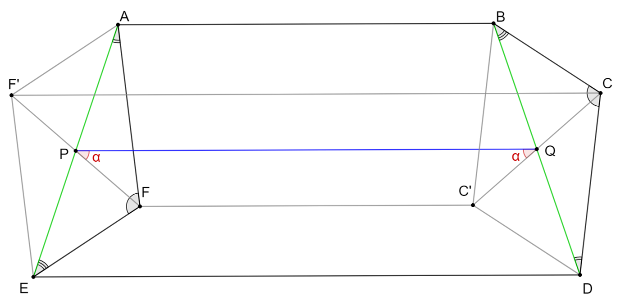
Лемма. У любого многоугольника существует внутренняя диагональ.

Доказательство. Введем систему прямоугольных координат, в которых у каждой вершины разные y-координаты. Выберем вершину M с наименьшей y-координатой. Рассмотрим смежные с ней вершины K, L. Если KL целиком лежит внутри многоугольника, то мы нашли искомую диагональ KL. Иначе отрезок KL пересекается с границей многоугольника, что может быть в двух вариантах: внутри треугольника MKL нет других вершин, и другие вершины есть. В первом случае KL пересекает внутренность некоторой стороны b многоугольника, но поскольку вершин внутри нет, концы b должны быть за пределами KL, что означает пересечение b с отрезком MK или ML, что означает самопересечение граничной ломаной — противоречие. Значит, внутри MKL обязаны быть другие вершины многоугольника, тогда выберем из них N, имеющую наименьшую y-координату. Если MN пересекается с участком границы, то либо одна из вершин этого участка границы лежит внутри треугольника MKL, но тогда она строго ниже N — противоречие с выбором вершины N, либо этот участок границы не содержит вершин внутри MKL, но в этом случае он обязан пересекаться с отрезками MK или ML, что противоречит несамопересекаемости граничной ломаной.

Таким образом, всегда найдется диагональ, лежащая строго внутри многоугольника (действуя индуктивно, можно доказать, что таких диагоналей всегда не меньше $n-3$). Она разделяет многоугольник на два многоугольника с меньшим числом вершин, при этом, сумма внутренних углов каждого из них равна сумме углов исходного многоугольника. По индукции, начиная с $n = 4$, становится видно, что при любом n любой n-угольник может быть разбит на $n-2$ треугольников непересекающимися диагоналями, откуда и вычисляется сумма внутренних углов.

Теперь мы знаем, что сумма углов любого шестиугольника, не обязательно выпуклого, равна 720°. Поэтому из условия $180^\circ = \angle A + \angle D = \angle B + \angle E$ следует, что $\angle C + \angle F = 360^\circ$, что, в свою очередь, влечет равенство треугольников AFE и DCB. Так как углы $\angle BDC$ и $\angle EAF$ равны, а $180^\circ = \angle BAE + \angle BDE$, четырехугольник $ABDE$ — вписанный. Хорды AE и BD его описанной окружности равны, поэтому $ABDE$ является равнобокой трапецией.





Пусть, без ограничения общности, $AF = CD \geqslant BC = EF$. Отразим точки F и C относительно середин P и Q отрезков AE и BD соответственно, получим точки F' и C'. Параллелограммы $AFEF'$ и $BCDC'$ равны, поэтому $\angle BQC = \angle C'QD = \angle FPE = \angle F'PA$, откуда $\angle PQC' = \angle FPQ = \alpha$. Расстояние от точки C' до прямой PQ равно $C'Q \sin\alpha = FP \sin\alpha$, что равно расстоянию от точки F до прямой PQ. На то же расстояние удалены точки F'

и C от прямой PQ, поэтому четырехугольник $CC'FF'$ является равнобокой трапецией с основаниями $C'F$ и $F'C$, параллельными прямой PQ (и, соответствено, AB и DE). Кроме того, отрезок PQ является общей средней линией для трапеций $CC'FF'$ и $ABDE$, и его длина равна $(AB+DE)/2$. Но в $CC'FF'$ отрезок CF является диагональю, которая всегда длиннее, чем средняя линия, если трапеция невырождена. Равенство $CF = (AB + DE)/2$ возможно только если F и C обе попали на прямую PQ и $CC'FF'$ является вырожденной трапецией.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Доказано строгое неравенство (не рассмотрен случай равенства)	$+.$	14
Доказано, что $ABDE$ равнобокая трапеция, или что $ABDE$ вписанный *Или* Используется построение параллелограмма	$\mp$	5
Доказано равенство треугольников AFE и DCB или эквивалентные утверждения	$-.$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 11.4. В комплекте для сборки игрушечного поезда есть один локомотив (который всегда расположен спереди), $2n$ одинаковых красных вагонов и $3n$ одинаковых желтых вагонов. Назовем поезд длинным, если в нем есть хотя бы n вагонов (не считая локомотива). Сколько различных длинных поездов можно собрать, используя этот комплект? (Ответ должен быть дан в замкнутом виде: в ответе не должно быть сумм с переменным числом слагаемых, многоточий и т.д.) (*Сергей Корнеев*)

Ответ. $\binom{5n+2}{2n+1} - 2^n$.

Решение. Посчитаем количество всех поездов, которые можно собрать в данном наборе. Зафиксируем число k ($0 \leqslant k \leqslant 2n$) и посчитаем, сколько всего поездов с ровно k красными вагонами. Желтых вагонов может быть от 0 до $3n$, и для каждого числа l желтых вагонов от 0 до $3n$ мы выбираем k мест в строке длины $k + l$. Таким образом, искомое количество поездов с k красными вагонами равно сумме $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{k+3n}{k}$. Докажем, что эта сумма равна $\binom{k+3n+1}{k+1}$. Распишем каждое слагаемое, пользуясь следующим тождеством Паскаля: $\binom{a}{b} = \binom{a+1}{b+1} - \binom{a}{b+1}$. Мы получим: $\left(\binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1}\right) + \left(\binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1}\right) + \left(\binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k+1}\right) + \ldots + \left(\binom{k+3n}{k+1} - \binom{k+3n-1}{k+1}\right) + \left(\binom{k+3n+1}{k+1} - \binom{k+3n}{k+1}\right)$ (разложены и выписаны явно первые три и последние два члена вычисляемой суммы). В каждой скобке вычитаемое равно уменьшаемому из предыдущей скобки. Нетронутым останется лишь уменьшаемое в последней скобке, равное $\binom{k+3n+1}{k+1}$, — это и есть искомый результат сложения. Заметим, что этот результат равен $\binom{k+3n+1}{3n}$ в силу симметрии биномиальных коэффициентов. Теперь нужно сложить эти числа по всем k от 0 до $2n$. Получим сумму $\binom{3n+1}{3n} + \binom{3n+2}{3n} + \ldots + \binom{5n+1}{3n}$, которая суммируется аналогичным образом, и результат этого суммирования равен $\binom{5n+2}{3n+1} - \binom{3n}{3n} = \binom{5n+2}{2n+1} - 1$. Мы посчитали количество всех поездов. Осталось лишь вычесть количество поездов, в которых не более $n-1$ вагонов, но для каждого $l \leqslant n-1$ количество поездов длины l очевидно равно 2^l, а всего в сумме таких поездов $2^n - 1$. Таким образом, длинных поездов $\binom{5n+2}{2n+1} - 2^n$.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	15
Арифметическая ошибка в вычислениях	+.	13
Посчитано количество всех поездов, в том числе с $\leqslant n-1$ вагонами	$\pm$	10
Верный ход решения, но суммы биномиальных коэффициентов не вычислены в замкнутом виде	$\mp$	6
Посчитан один из трех различных вариантов	–.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 11.5. Саша и Гоша поставили 2025 фишек в клетки доски 1000×1000 и по очереди ходят. Саша своим ходом может взять две фишки, стоящие в левом верхнем и правом нижнем углу некоторого клетчатого прямоугольника (со сторонами больше 1), и поместить их по одной в две другие угловые клетки того же прямоугольника. Гоша своим ходом может передвинуть любую фишку либо вправо вниз, либо влево вверх по диагонали на любое число клеток. Они заканчивают ходить, когда кто-то не может сделать ход. Могут ли они ходить бесконечно? (*Лев Владимиров*)

Ответ. Не могут.

Решение. Запишем в клетки доски $n \times n$ положительные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ так: число a_i записано в каждой клетке i-й диагонали, параллельной главной диагонали, идущей слева сверху вправо вниз (ниже приведен пример для доски 5×5).

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3
a_8	a_7	a_6	a_5	a_4
a_9	a_8	a_7	a_6	a_5

Сопоставим каждой конфигурации фишек целочисленную величину $\mathcal{S}$, которая равна сумме чисел в клетках, занятых фишками. Тогда $\mathcal{S}$ не меняется при действиях Гоши. Пусть последовательность $\{a_i\}$ быстро растет как функция от i, например, $a_i = 2^i$. Покажем, что в этом случае $\mathcal{S}$ строго увеличивается с каждым действием Саши. Пусть Саша выбрал прямоугольник, у которого левая верхняя и правая нижняя клетки имели числа a_k и a_l. Заметим, что в нашей расстановке для всякого числа a_m числа, находящиеся строго ниже и левее него, имеют бóльшие номера. Поэтому, после хода Саши числа изменятся с a_k и a_l на a_{k+h} и a_{l-h}, где $h+1$ — высота выбранного прямоугольника, измеренная в клетках ($h \geqslant 1$). Тогда $a_{k+h} + a_{l-h} = 2^{k+h} + 2^{l-h} > 2^k + 2^l = a_k + a_l$, а значит, $\mathcal{S}$ станет строго больше. При этом, $\mathcal{S}$ все время остается целочисленным. Так как $\mathcal{S}$ ограничено сверху (как минимум, оно меньше, чем $2025 a_{2n-1}$), игра не может продолжаться бесконечно.

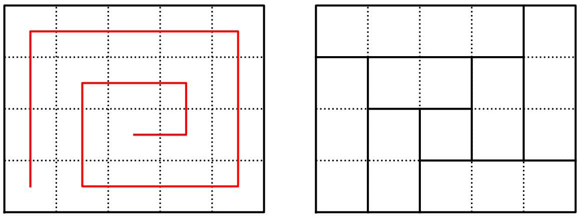
Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	20
Решение содержит мелкие неточности, которые легко устранить	+.	15
Приведен ограниченный целочисленный полуинвариант, для которого доказано, что ходы Саши меняют его строго в одну сторону	±	10
Приведен полуинвариант, значение которого не меняется при ходах Гоши	∓	5
Грубые ошибки в построении полуинварианта	−.	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 11.6. При каких $n \geqslant 2025$ существует такой набор из n прямоугольников, что из них можно собрать прямоугольник (без пустот и наложений), а из любого меньшего их подмножества, состоящего из хотя бы двух прямоугольников, — нельзя? (*Георгий Караваев*)

Ответ. При всех $n \geqslant 2025$.

Решение. Для начала определим разбиение клетчатого прямоугольника $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, которое в дальнейшем будем называть *спиральным*. Нарисуем спираль, начиная двигаться из угла вдоль короткой стороны прямоугольника, если они не равны. Затем расположим в центре спирали квадратик 1×1, за ним — прямоугольник 1×2, а затем будем накрывать все непокрытые клетки частично покрытого отрезка спирали прямоугольником ширины 1 и соответствующей длины.



Для того, чтобы получить искомое разбиение, построим спиральное разбиение клетчатого прямоугольника со столбцами и строками неравной ширины. Положим ширину столбца i равной $w_i = (n+1)^{i-1}$, а ширину строки j равной $h_i = C \cdot (n+1)^{j-1}$, где $C = (n+1)^{n+3}$

Для начала разобьем неравномерный клетчатый прямоугольник на $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ прямоугольников (назовем их *малыми*) по линиям сетки. Выясним, какие прямоугольники можно сложить из подмножества множества малых прямоугольников.

Для начала заметим, что суммарная площадь малых прямоугольников равна

$$\left(1 + (n+1) + \ldots + (n+1)^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}\right) \cdot \left(C + C \cdot (n+1) + \ldots + C \cdot (n+1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}\right) <$$
$$< C \cdot n^2 \cdot \left(1 + (n+1) + \ldots + (n+1)^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}\right) \cdot \left(1 + (n+1) + \ldots + (n+1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}\right) =$$
$$= C \cdot \left((n+1)^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1} - 1\right) \cdot \left((n+1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1} - 1\right) <$$
$$< C \cdot (n+1)^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1} \cdot (n+1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1} = C \cdot (n+1)^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2} = C \cdot (n+1)^{n+3} = C^2.$$

Заметим также, что если в прямоугольнике, сложенном из малых прямоугольников, два прямоугольника ориентированы по-разному, обе его стороны имеют длину не менее C, а значит, его площадь будет не меньше C^2, что, как мы увидели выше, невозможно. Тогда, если некоторый прямоугольник сложен из малых, все малые прямоугольники в нем ориентированы одинаково.

Утверждение 1. Пусть $a_1, \ldots, a_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$ и $a'_1, \ldots, a'_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$ — некоторые целые неотрицательные числа, не превышающие n. Тогда если $a_1 w_1 + \ldots + a_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} = a'_1 w_1 + \ldots + a'_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$, $a_i = a'_i$ для всех i.

Предположим, что для некоторых различных наборов $\{a_i\}$ и $\{a'_i\}$ оказалось, что $a_1 w_1 + \ldots + a_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} = a'_1 w_1 + \ldots + a'_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$. Пусть k — наибольшее число, при котором $a_k \neq a'_k$. Не умаляя общности положим, что $a_k > a'_k$. Тогда

$$\left(a_1 w_1 + \ldots + a_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}\right) - \left(a'_1 w_1 + \ldots + a'_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}\right) =$$
$$= (a_1 - a'_1) w_1 + \ldots + \left(a_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} - a'_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}\right) w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} = (a_1 - a'_1) w_1 + \ldots + (a_k - a'_k)\, w_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} >$$
$$> (-n) \cdot (w_1 + \ldots + w_{k-1}) + w_k = (-n) \cdot \left(1 + (n+1) + \ldots + (n+1)^{k-2}\right) + (n+1)^{k-1} =$$
$$= -\left((n+1)^{k-1} - 1\right) + (n+1)^{k-1} = 1 > 0.$$

Утверждение 2. Пусть $b_1, \ldots, b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ и $b'_1, \ldots, b'_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ — некоторые целые неотрицательные числа, не превышающие n. Тогда если $b_1h_1 + \ldots + b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}h_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = b'_1h_1 + \ldots + b'_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}h_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, $b_i = b'_i$ для всех i.

Доказывается аналогично утверждению 1.

По построению для любого i малых прямоугольников ширины w_i не больше $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leqslant n$, а малых прямоугольников высоты h_i не более $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \leqslant n$.

Предположим, что мы сложили из подмножества малых прямоугольников некоторый прямоугольник. Заметим, что верхняя сторона этого прямоугольника состоит из сторон малых прямоугольников, а значит, ее длина представима в виде $a_1w_1 + \ldots + a_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}w_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$, где a_i — целые неотрицательные числа, не превышающие n. Аналогично, высота прямоугольника представима в виде $b_1h_1 + \ldots + b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}h_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, где b_i — целые неотрицательные числа, не превышающие n.

Пусть некоторая горизонтальная прямая пересекает прямоугольник и не содержит сторон малых прямоугольников. Тогда суммарная ширина всех малых прямоугольников, которые пересекает эта прямая, равна $a_1w_1 + \ldots + a_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}w_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$. Из утверждения 1 следует, что любая такая прямая пересекает ровно a_i прямоугольников ширины w_i.

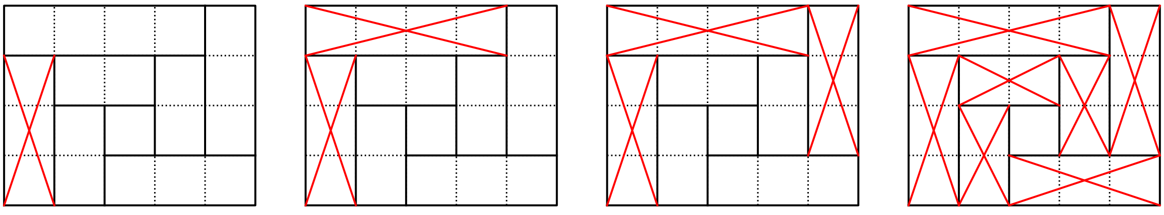
Значит, из всех прямоугольников ширины w_i можно сложить a_i прямоугольников размера $w_i \times \left(b_1h_1 + \ldots + b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}h_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\right)$. Из утверждения 2 следует, что для каждого такого прямоугольника нам нужно использовать b_i малых прямоугольников высоты h_i. Получается, для построения нашего прямоугольника нам понадобится не менее $a_i \cdot b_j$ малых прямоугольников размера $w_i \times h_j$. С другой стороны, все малые прямоугольники различны, а значит, все a_i и b_i равны либо 0, либо 1.

Получается, что мы можем собрать из подмножества малых прямоугольников прямоугольник побольше тогда и только тогда, когда они лежат на пересечении некоторых строк и столбцов исходного клетчатого прямоугольника.

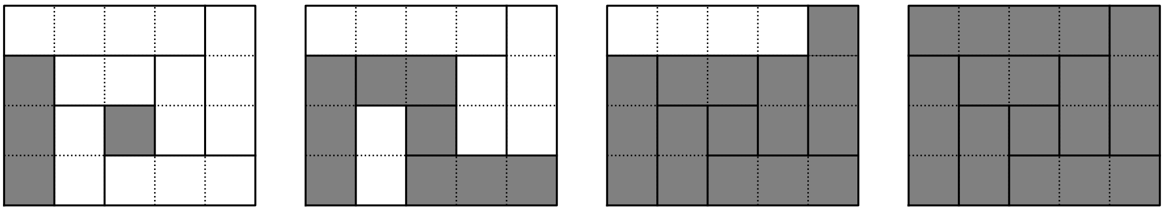
Построим спиральное разбиение для исходного прямоугольника. Предположим, что из некоторого подмножества A прямоугольников спирального разбиения, состоящего из хотя бы двух прямоугольников, можно собрать прямоугольник.

Назовем прямоугольник, содержащий внешний конец спирали, ключевым, а прямоугольник, расположенный на внутреннем конце спирали, — центральным. Не умаляя общности, предположим, что ключевой прямоугольник оказался вертикальным, то есть, все его клетки лежат в одном столбце.

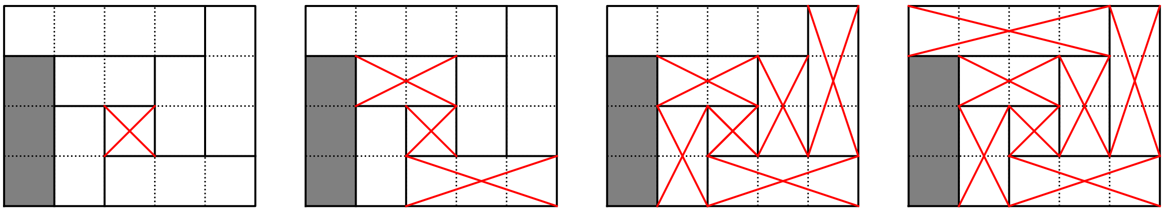
Предположим, что ключевой прямоугольник не входит в A. Тогда следующий за ним по спирали прямоугольник тоже не входит в A; иначе он будет единственным прямоугольником в A, так как он содержит малый прямоугольник из столбца, все остальные клетки которого заняты ключевым прямоугольником. По этой же причине мы сможем поочередно исключить все остальные прямоугольники из A.



Теперь предположим, что ключевой прямоугольник входит в A. Если центральный прямоугольник входит в A, в него входят и все прямоугольники, содержащие клетку на пересечении строк, содержащих клетки ключевого прямоугольника, и столбца, в котором лежит центральный прямоугольник. Тогда в A входят прямоугольники из всех столбцов прямоугольника и всех строк, кроме, быть может, одной (не пересекающейся с ключевым прямоугольником). Нетрудно заметить, что тогда все прямоугольники должны входить в подмножество A.



Наконец, если центральный прямоугольник не входит в A, ни один прямоугольник, содержащий клетку на пересечении строк, содержащих клетки ключевого прямоугольника, и столбца, в котором лежит центральный прямоугольник, не может содержаться в A. Из этого следует, что ни один прямоугольник, кроме ключевого, не может входить в A.



Получается, A состоит из всех прямоугольников разбиения, что и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	20
Обе идеи из двух последующих критериев	$\mp$	5
Идея спирального разбиения	$-.$	3
Идея рассмотрения прямоугольников с попарно различными длинами сторон	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0