Решения задач

Задача 10.1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, оба степени n со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно n различных целых корней. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ четны, а все корни многочлена $Q(x)$ нечетны. Докажите, что у многочлена $P(x)+Q(x)$ не может быть целых корней. (*Матвей Никольский*)

Решение. Пусть четные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни многочлена $P(x)$, а нечетные числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — корни многочлена $Q(x)$. Тогда $P(x)+Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) + (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$. Подставим в $P(x)+Q(x)$ целое число k. Возможны два случая: k четно и k нечетно. В первом случае $P(k) = (k-a_1)(k-a_2)\ldots(k-a_n)$ четно как произведение четных чисел, а $Q(k) = (k-b_1)(k-b_2)\ldots(k-b_n)$ нечетно как произведение нечетных чисел, поэтому, $P(k)+Q(k)$ нечетно. Аналогично в случае нечетного k $P(k)$ нечетно как произведение нечетных чисел, а $Q(k)$ четно как произведение четных чисел, и $P(k)+Q(k)$ опять нечетно. Таким образом, $P(k)+Q(k)$ нечетно при любом целом k, и поэтому не может быть равно нулю. Значит, $P(x)+Q(x)$ не имеет целых корней.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Частично отсутствует вывод (что целых корней нет или не может быть)	+.	14
Присутствуют рассуждения про четность коэффициентов многочленов, есть недочеты *Или* Сделан необоснованный вывод про знак свободного члена с последующим использованием этого факта, но он не влияет на ход решения *Или* Полностью отсутствует вывод «в силу нечетности не может быть нуля» и дальнейшие рассуждения	±	9
Присутствуют рассуждения про четность коэффициентов многочленов, но решение к доказательству не приводит *Или* Сделан необоснованный вывод про знак свободного члена с последующем использованием этого факта, и он влияет на ход решения	∓	6
Рассуждения о коэффициентах или свободных членах, не приводящие к доказательству	−.	3
Рассмотрен только частный случай; переписанное условие; отсутствие иных содержательных рассуждений	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 10.2. Дана двусторонняя линейка без делений. Этот инструмент позволяет делать две операции:

1) провести прямую через две данные точки;
2) провести прямую, параллельную данной, на расстоянии 1 от нее.

Постройте с ее помощью (и не используя никакие другие инструменты) правильный треугольник. (*Георгий Караваев*)

Решение. Для начала построим две пары параллельных прямых. На их пересечении образуется параллелограмм с одинаковыми высотами, равными 1, а значит, являющийся ромбом. Проведем его диагонали, как известно, являющиеся перпендикулярными. Заметим, что с помощью двух этих перпендикулярных прямых и построения параллельных прямых на расстоянии 1 мы можем построить клетчатую сетку любого конечного размера, состоящую из квадратиков со стороной 1. Введем систему координат с центром в одном из узлов сетки и с осями, параллельными сторонам клеток. Проведем прямую l через точки $(0,0)$ и $(1,1)$. Теперь проведем снизу от нее параллельную прямую l' на расстоянии 1. Заметим, что на пересечении пар прямых $x=0$, $x=1$ и l, l' образуется ромб со стороной длины $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, а значит, l' проходит через точку $(0,-\sqrt{2})$. Теперь проведем прямую m через пару точек $(0,-\sqrt{2})$ и $(1,0)$, а также параллельную ей прямую m' на расстоянии 1 сверху от нее. На пересечении пар прямых $x=0$, $x=1$ и m, m' образуется ромб со стороной длины $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$, а значит, m' проходит через точку $(1,\sqrt{3})$. Осталось лишь соединить точки $(0,0)$, $(1,\sqrt{3})$ и $(2,0)$, чтобы получить искомый равносторонний треугольник.

Критерии. Максимальный балл: 15.

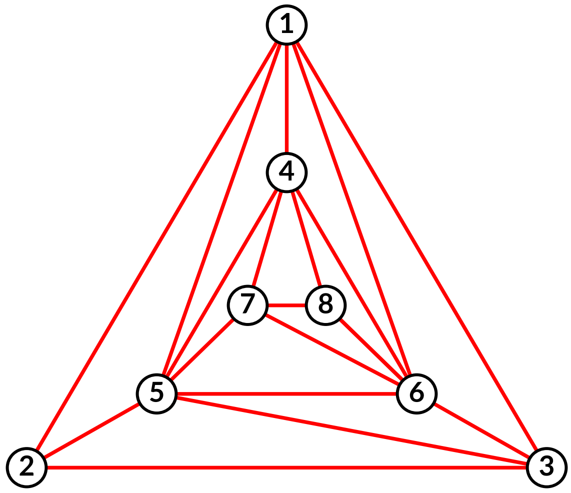
Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	+	15
Задача решена верно, но один из шагов не прописан явно	+.	14
Построен отрезок длины $\sqrt{3}$ с концом в узле, параллельный линии сетки, но дальнейших продвижений нет	$\pm$	11
Построена клетчатая сетка (или корректно описано, как строить)	$\mp$	6
Описано построение перпендикулярных прямых (диагонали ромба), но не написано, что с их помощью можно построить сетку	−.	2
Только общие рассуждения про правильный треугольник	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 10.3. На плоскости отмечено 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Между каждыми двумя проведен либо красный, либо синий отрезок. Красные отрезки не имеют общих точек, кроме, возможно, отмеченных точек. Обязательно ли найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, все стороны которого синие?

(*Георгий Караваев*)

Ответ. Не обязательно.

Решение. Пример 1. Рассмотрим набор точек, изображенных на иллюстрации. Для простоты восприятия проведем только красные отрезки.

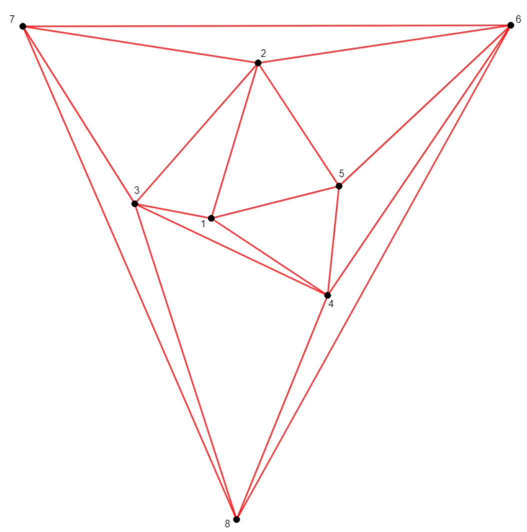


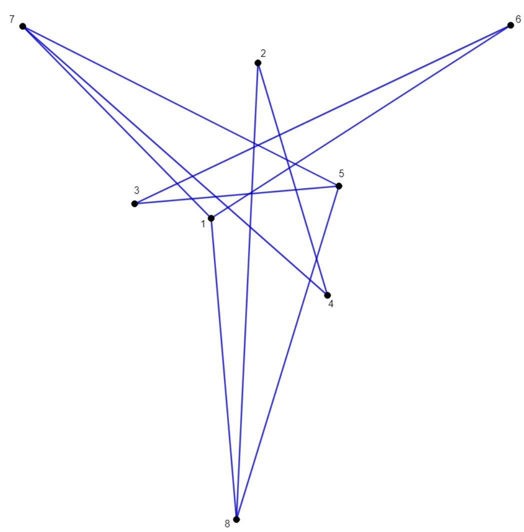
Докажем, что синего треугольника не найдется. Для этого разделим точки на три *уровня*: точки 1, 2 и 3 будут принадлежать *внешнему уровню*, точки 4, 5 и 6 — *среднему*, а 7 и 8 — *внутреннему*.

Заметим, что на каждом уровне все точки соединены между собой красными отрезками, а значит, если синий треугольник существует, все его вершины находятся на разных уровнях.

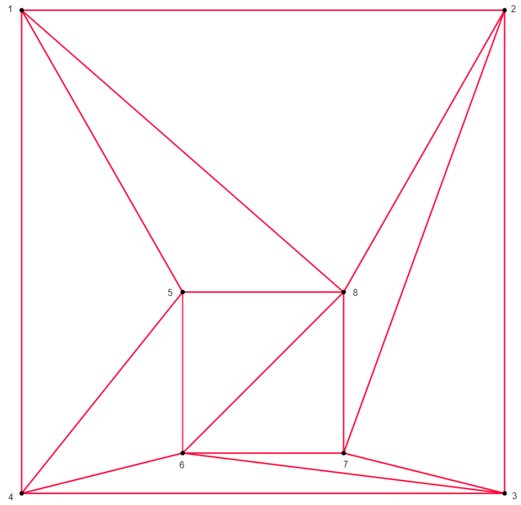
Вершина 7 соединена со всеми вершинами среднего уровня, а значит, не может быть вершиной синего треугольника. Аналогично, вершина 5 соединена со всеми вершинами внешнего уровня, а значит, не может быть вершиной синего треугольника. Тогда вершина 8 соединена со всеми вершинами среднего уровня, кроме 5, и не может быть вершиной синего треугольника. Значит, ни одна вершина внутреннего уровня не является вершиной треугольника с синими сторонами, а значит, такого треугольника не найдется.

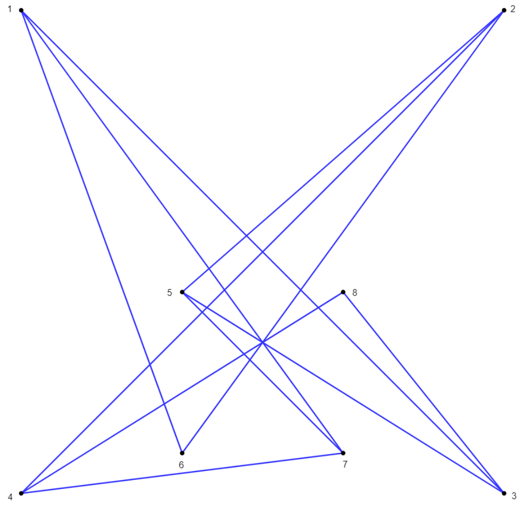
Пример 2.





Пример 3.





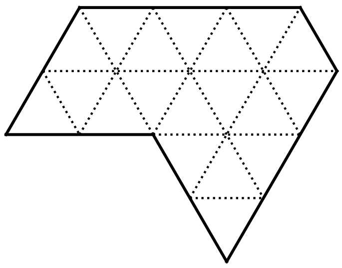
Пример 4. Возьмем два графа K_4 с красными ребрами. Тогда синие отрезки образуют граф $K_{4,4}$, в котором, как и любом другом полном двудольном графе, нет треугольников.

Замечание. Если точек 9 или более, то синий треугольник обязательно найдется. Другими словами, граф, дополнительный к планарному на 9 и более вершинах, всегда содержит граф-треугольник в качестве подграфа.

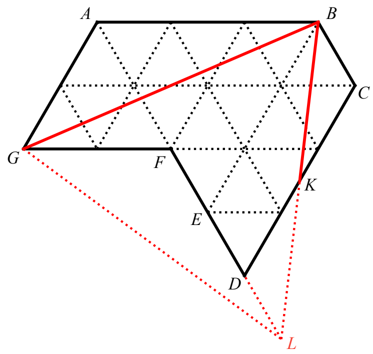
Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Построен верный контрпример с доказательством корректности	$+$	15
Приведено описание верного примера, но ничего не сказано про три точки на одной прямой в описании *Или* Приведен верный пример, в котором три точки лежат на одной прямой, но это легко исправимо	$+.$	12
Построен верный пример, в котором нарисованы красные отрезки, однако синие отрезки не нарисованы и не обосновано, почему синие отрезки не образуют треугольники	$\pm$	9
Приведена идея построения примера и объяснение, почему пример корректен, но сам пример в явном виде и его описание отсутствует	$\mp$	6
Рассмотрен частный случай, когда точки лежат на окружности	$-.$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 10.4. Разрежьте фигуру, составленную из одинаковых равносторонних треугольников (см. рисунок), на три (не обязательно равные) части и сложите из них равносторонний треугольник. (*Георгий Караваев*)



Решение. Решение представлено на рисунке.



Покажем, что это действительно требуемое разрезание. Изначально был семиугольник $ABCDEFG$. Точка L получена отражением точки B относительно точки K — середины стороны CD, в результате чего получен треугольник DKL, равный треугольнику CKB. При этом, $FL = 3 = AB$, откуда следует, что треугольники ABG и FLG равны по двум сторонам ($FL = AB$ и $FG = GA$) и углу между ними $\angle LGF = \angle BAG = 120°$. Таким образом, треугольники ABG и FLG совместятся после разрезания и указанного перекладывания. Получится равносторонний треугольник BGL, длины сторон которого равны длине большей диагонали параллелограмма со сторонами 2 и 3 и тупым углом 120°.

Критерии. Максимальный балл: 15.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное разрезание с перекладыванием и доказательство, что в результате получается равносторонний треугольник	+	15
Показано верное разрезание и перекладывание, но не доказано, что результатом является равносторонний треугольник	±	8
Показано верное разрезание, но не указано перекладывание и нет дальнейших доказательств	∓	5
Найдена сторона треугольника ($\sqrt{19}$), но нет разрезания	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	−	0

Задача 10.5. По кругу стоит несколько коробок. В одной из них 2025 камней, а остальные пусты. Разрешается взять два камня (возможно, из разных коробок) и переложить один в соседнюю коробку по часовой стрелке, а другой — в соседнюю против часовой стрелки. Через некоторое время все камни оказались в одной и той же коробке, соседней с начальной. Докажите, что один из камней побывал во всех коробках. (*Александр Юран*)

Решение. Занумеруем камни от 1 до 2025. Занумеруем коробки от 0 до $n-1$ по или против часовой стрелки так, чтобы все камни в начале были в 0-й коробке а в конце оказались в 1-й.

Расставим бесконечное количество кувшинов в ряд (у каждого кувшина будет номер — целое число). Положим в кувшин с нулевым номером 2025 шаров, занумерованных от 1 до 2025. Каждый ход, когда камень с номером i перекладывают из коробки номер k в коробку номер $(k+1) \mod n$, будем перекладывать шар номер i из кувшина k' (где он находился на момент перекладывания камня) в кувшин номер $k'+1$. Аналогично, когда камень с номером i перекладывают из коробки номер k в коробку номер $(k-1) \mod n$, будем перекладывать шар номер i из кувшина k' (где он находился на момент перекладывания камня) в кувшин номер $k'-1$. Таким образом, одновременно с перекладыванием двух камней мы будем перекладывать два шара. Заметим, что остаток по модулю n от номера кувшина, в котором находится i-й шар, будет всегда равен номеру коробки, в котором находится i-й камень.

Обозначим номер кувшина, в котором находится i-й шар в данный момент, за $Q(i)$. Мы только что выяснили, что тогда номер коробки, в котором находится i-й камень, равен $Q(i) \mod n$. Теперь ясно, что в конце все шары оказались в кувшинах, номера которых сравнимы с 1 по модулю n. Заметим, что сумма $Q(1)+Q(2)+\ldots+Q(n)$ в любой момент времени равна нулю: в начале она равна нулю, так как все шары были в кувшине с номером 0, и каждый ход одно из слагаемх увеличивается на 1, а другое — уменьшается. Поскольку ни один из шаров в конце не находится в кувшине номер 0, один из шаров (допустим, i-й) оказался в конце в кувшине с отрицательным номером. Поскольку этот номер сравним с 1 по модулю n, номер кувшина i-го шара в конце концов оказался меньше либо равен $1-n$.

Итого, номер кувшина i-го шара каждый ход менялся не более, чем на 1, и в конце стал меньше либо равен $1-n$. Но это значит, что остатоки от деления на n номера кувшина i-го шара пробежали все возможные значения от 0 (в начале) до $n-1$. То есть, номер коробки i-го камня пробежал все возможные значения от 0 до $n-1$, что и требовалось.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	20
Задача сведена к рассмотрению сдвигам целых чисел $\mod n$ и показано наличие инварианта	$\pm$	11
Аналогично предыдущему критерию, но присутствуют мелкие неточности	$\pm$	10
Присутствует идея инварианта, других продвижений нет	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0

Задача 10.6. Существует ли функция f, определенная на всей числовой прямой, такая, что для любого x выполнено равенство $f(f(x)) = x^2 - x - 1$? (*Георгий Караваев*)

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что такая функция f существует. Положим $g(x) = x^2 - x - 1 = f(f(x))$. Заметим, что $g(x) = x \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x \in \{1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\}$. Также заметим, что $g(g(x)) = x \iff (x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - x - 1) - 1 = x \iff x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$. Два корня этого уравнения мы уже знаем, так как $g(x) = x \Rightarrow g(g(x)) = g(x) = x$, откуда $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 1) = 0$, а значит, $g(g(x)) = x \iff x \in \{-1, 1 - \sqrt{2}, 1, \sqrt{2} + 1\}$. Заметим, что $g(g(1)) = 1 \Rightarrow g(g(f(1))) = f(f(f(f(f(1))))) = f(g(g(1))) = f(1)$, откуда $f(1) \in \{-1, 1 - \sqrt{2}, 1, \sqrt{2} + 1\}$. Проверим все случаи. Если $f(1) = 1$, $1 = f(1) = f(f(1)) = g(1) = -1$. Если $f(1) = -1$, $1 = g(-1) = f(f(-1)) = f(f(f(1))) = f(g(1)) = f(-1) = f(f(1)) = g(1) = -1$. Если $f(1) \in \{1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\}$, $1 = g(g(1)) = f(f(f(f(1))) = f(g(f(1))) = f(f(1)) = g(1) = -1$. В любом случае приходим к противоречию, а значит, искомой функции не существует.

Критерии. Максимальный балл: 20.

Содержание критерия	**Оценка**	**Балл**
Верное решение	$+$	20
Показано, что $f(\sqrt{2} \pm 1) \in \{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1\}$	$\mp$	8
Решение не соответствует ни одному из критериев выше	$-$	0