



Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Теория игр» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

Все задания выполняются в этой системе: решения вносите в специальное поле для ответов. Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах A4 и загрузить фото/скан работы в конце состязания (на это у вас будет 15 минут).

В последние 15 минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено: это время отведено на загрузку файлов. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Обратите внимание на то, что черновики к проверке не принимаются. Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 15

Камень-ножницы-бумага. Одна рука (15 баллов)

В первой серии второго сезона известного сериала герои вынужденно играют в игру, которую в российском переводе назвали «Камень-ножницы-бумага. Одна рука». Правила этой игры заключаются в следующем. Игроки одновременно, используя две руки, выбирают два символа и показывают друг другу. Затем одновременно убирают одну руку за спину. В итоге победитель определяется стандартными правилами игры «Камень-ножницы-бумага». Камень побеждает ножницы, которые, в свою очередь, побеждают бумагу, а бумага побеждает камень. Если оба игрока показывают одинаковые символы, то игра заканчивается ничьей. Считайте, что выигрыш игроки оценивают в 1, проигрыш в (-1), а ничью — в 0. Найдите равновесие Нэша совершенное по подыграм в данной игре.

Rock-paper-scissors. One hand (15 points)

In one famous series (s2:e1), the heroes are forced to play a game that was called "Rock-Paper-Scissors. One Hand" in the Russian translation. The rules of this game are as follows. Players simultaneously, using both hands, choose two symbols and show them to each other. Then they simultaneously put one hand behind their backs. As a result, the winner is determined by the standard rules of the game "Rock-Paper-Scissors". Rock beats scissors, which in turn beats paper, and paper beats rock. If both players show the same symbols, the game ends in a draw. Consider that the players value a win at 1, a loss at (-1), and a draw at 0. Find the subgame perfect Nash equilibrium in this game.

Вопрос 2

Балл: 12

Победитель получает всё (12 баллов)

В пространственной модели политической конкуренции избиратели равномерно распределены на отрезке $[0,1]$ и голосуют за ближайшего кандидата. При нескольких равноудаленных кандидатах избиратели выбирают между ними равновероятно. Победа кандидата определяется простым большинством голосов, при равенстве голосов у нескольких кандидатов победитель выбирается равновероятно. Покажите, что если кандидаты заинтересованы только в победе (а не в доле голосов), то в игре, в которой кандидаты одновременно и независимо выбирают свою позицию на отрезке, при любом количестве кандидатов существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

The winner takes it all (12 points)

In a spatial model of political competition, voters are uniformly distributed on the interval $[0,1]$ and vote for the closest candidate. When there are several equally distant candidates, voters choose between them with equal probability. The winning of a candidate is determined by a simple majority of votes; if several candidates have the equal number of votes, the winner is chosen randomly with equal probability. Show that if candidates are interested only in the winning (and not in the share of votes), then in a game in which candidates simultaneously and independently choose their position on the interval, there is a Nash equilibrium in pure strategies for any number of candidates.

Вопрос 3

Балл: 20

Пари Гроссмейстера (20 баллов)

Историческая вставка: Николай Васильевич Абациев, гроссмейстер и чемпион СССР по шашкам, любил предлагать пари мастерам спорта: спорил что из 10 партий ровно 5 выиграет и ровно 5 проиграет. Начинал играть в шашки, если понимал, что выиграш в партии не светит, переключался на поддавки.

Про Древнюю Игру известно, что в неё играют двое и что существовало две версии игры: прямая и обратная. Правила были абсолютно одинаковы, за исключением того, что в прямой версии игры побеждает тот, кто первый уничтожит фишки соперника, а в обратной побеждает тот, кто первый избавится от своих фишек. В обеих версиях Древней Игры обязательно побеждает кто-то из двух игроков, ничья невозможна, в отличие от шахмат и шашек.

Гроссмейстер отлично играет как в прямую, так и в обратную версию Древней Игры. Однажды он предложил Мастеру пари. Гроссмейстер и Мастер сыграют шесть партий в прямую Древнюю Игру. Гроссмейстер говорит, что выиграет ровно в трех партиях. Если так и происходит, то Мастер дает ему приз, во всех остальных случаях приз такой же ценности Гроссмейстер отдает Мастеру. Это значит, что если Гроссмейстер уже выиграл три партии, то Мастер будет специально стремиться к поражению в следующих партиях.

Перед каждой партией игроки анализируют текущий счет в матче и решают, какую стратегию выбрать: уничтожать фишки соперника или избавляться от своих. Если один из игроков решает уничтожать фишки соперника, а другой избавляться от своих, то оба достигают своих целей. Если же игроки выбрали на партию одинаковый план, то Гроссмейстер достигает своей цели в партии с

Teoriya-igr

вероятностью $p > 0,5$ (ведь он одинаково отлично играет как в прямую, так и в обратную версию Древней Игры).

Найдите вероятность того, что Гроссмейстер выполнит пари.

Grandmaster's Bet (20 points)

Historical insert: Nikolai Vasilyevich Abatsiev, grandmaster and champion of the USSR in checkers, liked to offer bets to masters of sports: he bet that out of 10 games he would win exactly 5 and lose exactly 5. He started playing checkers, if he realized that there was no chance of winning the game, he switched to giveaways.

It is known about the Ancient Game that it is played by two people and that there were two versions of the game: direct and reverse. The rules were absolutely the same, except that in the direct version of the game the winner is the one who first destroys the opponent's pieces, and in the reverse version the winner is the one who first gets rid of his own pieces. In both versions of the Ancient Game, one of the two players must win, a draw is impossible, unlike chess and checkers.

The Grandmaster plays both the direct and reverse versions of the Ancient Game very well. One day, he proposed a bet to the Master. The Grandmaster and the Master will play six games of the direct Ancient Game. The Grandmaster says that he will win in exactly three games. If this happens, the Master gives him a prize, in all other cases the Grandmaster gives a prize of the same value to the Master. This means that if the Grandmaster has already won three games, the Master will specifically strive to lose in the next games.

Before each game, the players analyze the current score in the match and decide which strategy to choose: destroy the opponent's pieces or get rid of their own. If one of the players decides to destroy the opponent's pieces, and the other to get rid of his own, then both achieve their goals. If the players have chosen the same plan for the game, then the Grandmaster achieves his goal in the game with a probability of $p > 0.5$ (since he plays both the direct and the reverse version of the Ancient Game equally well).

Find the probability that the Grandmaster will fulfill the bet.

Вопрос 4

Балл: 13

Стабильные соседки (13 баллов)

Подруги Алиса, Белла, Вера и Галя заселяются в общежитие. В общежитии есть комнаты, в каждой из которых могут разместиться по две девушки.

У девушек есть строгие предпочтения в отношении соседок по комнате: это значит, что каждая из девушек может отранжировать подруг от более приятных соседок к менее приятным, причем никакие из соседок не будут одинаковыми по предпочтительности. Для каждой из девушек жить с подругой лучше, чем с незнакомой девушкой или одной. В общежитии достаточно много комнат, поэтому подруги могут меняться соседками, не дожидаясь согласия своей текущей соседки, и заселиться в новую пустую комнату.

Назовем разбиение девушек на пары соседок стабильным, если никакие из девушек не заблокируют разбиение, т.е. не захотят передоговориться и отселиться. Например, пусть для Алисы Вера более приятная соседка, чем Белла, а для Веры Алиса более приятная соседка, чем Галя. Тогда разбиение на пары соседок Алиса --- Белла и Вера --- Галя не будет стабильным: Алисе и Вере выгодно отказаться от текущих соседок в пользу друг друга, поэтому они объединятся в пару Алиса --- Вера и изначальное разбиение распадется. Пусть N --- количество способов разбить четырех подруг на стабильные пары соседок. Найдите все возможные значения N при всевозможных предпочтениях подруг и докажите, что других нет.

Stable neighbors (13 points)

Friends Alice, Bella, Vera and Galya move into a dorm. The dorm has rooms, each of which can accommodate two girls.

Teoriya-igr

The girls have strict roommate preferences: this means that each girl can rank her friends from more pleasant roommates to less pleasant roommates, and no roommates will be equally preferable. For each girl, living with a friend is better than with a stranger or alone. There are enough rooms in the dorm, so the friends can change roommates without waiting for the consent of their current roommate.

We call the division of girls into pairs of roommates stable if none of the girls block the division, i.e. they will not renegotiate and move out. For example, let Vera be a more pleasant roommate for Alice than Bella, and let Alice be a more pleasant roommate for Vera than Galya. Then the partition into pairs of neighbors Alice --- Bella and Vera --- Galya will not be stable: it is advantageous for Alice and Vera to give up their current neighbors in favor of each other, so they will unite into a pair Alice --- Vera and the initial partition will fall apart. Let N be the number of ways to split four friends into stable pairs of neighbors. Find all possible values of N for all possible preferences of the friends and prove that there are no others.

Вопрос 5

Балл: 15

Меньше всех, но не совсем (15 баллов)

Трое играют в следующую игру. Каждый называет натуральное число (целое, не меньшее 1). Побеждает тот, кто называет минимальное число, встретившееся один раз. (Например, если названы числа 2, 2 и 3, побеждает третий). Если названы три одинаковых числа, победитель определяется равновероятно. Найдите какое-либо симметричное равновесие по Нэшу (числа называются одновременно).

The least, but not quite (15 points)

Three people play the following game. Each person names a natural number (an integer not less than 1). The winner is the one who names the smallest number that occurs once. (For example, if the numbers 2, 2, and 3 are named, the third person wins.) If three identical numbers are named, the winner is determined equiprobably. Find any symmetric Nash equilibrium (the numbers are called simultaneously).

Вопрос 6

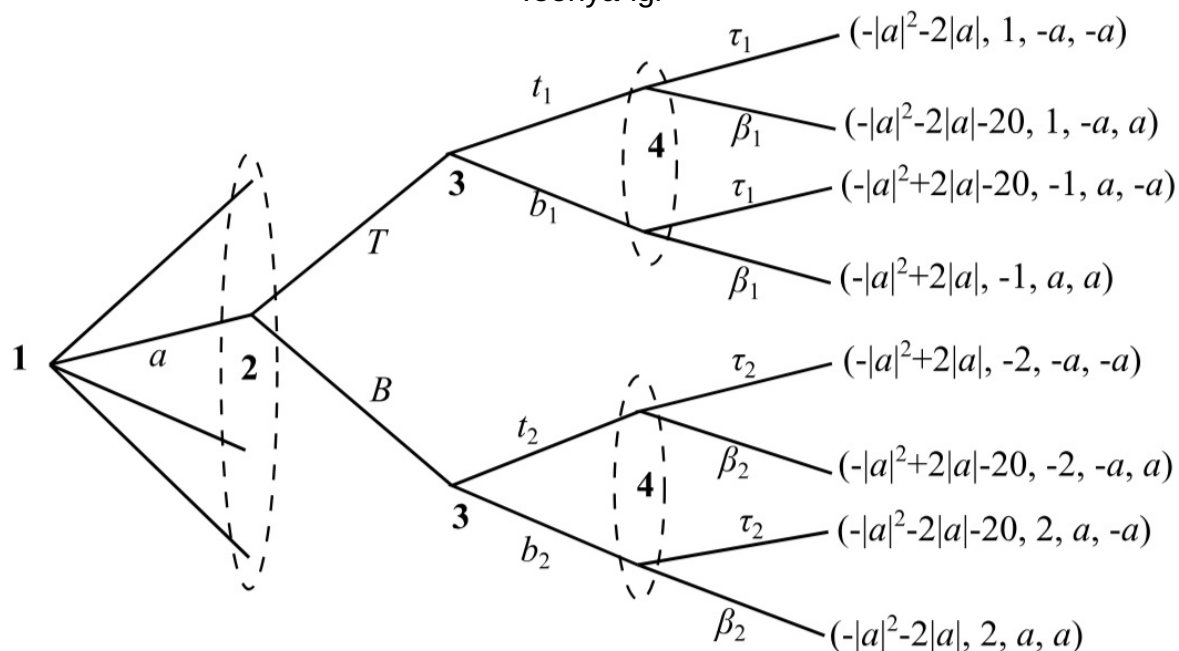
Балл: 25

В поисках равновесия (25 баллов)

Рассмотрите следующую игру 4х лиц. Игрок 1 выбирает число a из отрезка $[-1,1]$. На дереве игры изображен подграф после одного конкретного выбора игрока 1, все они аналогичны по своей структуре. Информационные множества игроков обозначены эллипсами.

Найдите равновесие, совершенное по подыграм, или покажите, что его не существует.

Теориya-igr



Searching for equilibrium (25 points)

Consider the following 4-person game (the tree is above). Player 1 chooses number a from the interval $[-1, 1]$. The game tree shows the subgraph after one particular choice of player 1, all of which are similar in structure. The players' information sets are shown as ellipses.

Find a subgame perfect equilibrium, or show that it does not exist.