



Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика и информатика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1-7. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Анализ данных и искусственный интеллект»: задания № 8-10.
- Трек «Финансовые технологии»: задания № 11-13.

Ответ на задания треков можно давать как на английском, так и на русском языке.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться максимально результативно выполнить задания двух треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Все задания выполняются в этой системе: решения вносите в специальное поле для ответов. Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах A4 и загрузить фото/скан работы в конце состязания (на это у вас будет 15 минут). Полученный ответ выписывается в конце решения и отдельно обводится в рамку.

Во время выполнения заданий вы можете:

- пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги, перед началом олимпиады покажите их на камеру);
- использовать встроенный в систему калькулятор;
- использовать таблицы математической статистики. Справочный материал можно открыть на новой вкладке/в новом окне, это не будет считаться нарушением. Использование других справочных материалов и сторонних ресурсов строго запрещено.

(Для перехода по ссылке нажмите на неё правой кнопкой мыши и откройте ссылку в новой вкладке/в новом окне. При возникновении проблем скопируйте адрес гиперссылки и вставьте вручную в поисковую строку браузера в новом окне)

В последние 15 минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено: это время отведено на загрузку файлов. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 10

Переведите текст с английского на русский язык. Для упрощения ввода формул рекомендуем выполнять задание на бумажных листах.

4.1. Critic network

We made the tracking error and the control inputs a reward function of the compensation controller. The reward value can be defined as follows:

$$r(e, \tau_{Pc}) = e^T Q_c e + \tau_{Pc}^T R_c \tau_{Pc} \quad (42)$$

where, Q_c and R_c are weight matrix.

To obtain effective control, we focus on the long-term performance value function $J_c(e)$, which can reflect the tracking performance of the system, instead of only on the value of r at the current moment. We obtain the long-term performance value function by integrating r from the present to the future, and its expression can be written as follows:

$$J_c(e) = \int_t^\infty r(e, \tau_{Pc}) d\tau_{Pc} \quad (43)$$

We expect to obtain a compensation control value τ_{Pc}^* , which can minimize the long-term value function, assuming that an optimal value function exists. From Eq. (43) the optimal value function $J^*(e)$ can be obtained, as follows:

$$J_c^*(e) = \int_t^\infty r(e, \tau_{Pc}^*) d\tau_{Pc} \quad (44)$$

To find the minimum point of $J_c(e)$, we take the derivative of the function to obtain the HJB function as

$$H^*(e, \tau_{Pc}^*, \nabla J^*) = r(e, \tau_{Pc}^*) + \nabla J^{*T} \dot{e} \quad (45)$$

where $\nabla J_c^{*T} = \partial J_c^* / \partial e$. The optimal control quantity is the point when the HJB function equals 0. The optimal compensation control using the gradient descent method $\partial H^* / \partial \tau_{Pc}^* = 0$ can be written as:

$$\tau_{Pc}^* = -\frac{1}{2} R_c^{-1} B^T \nabla J_c^* \quad (46)$$

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикрепленном документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикрепленном листе 1»)

Вопрос **2**

Балл: 10

Переведите текст с английского на русский язык. Для упрощения ввода формул рекомендуем выполнять задание на бумажных листах.

3.3.1. Propagation of embeddings

Here we tried to propagate the information across different layers. Because the neighborhood information across different users present across different layers in a GNN framework. For example the message passing across a single layer is described below:

Single layer propagation. The item pairs interacted by the user comes under the direct association and can be considered as first layer. Then the users having similar taste to the users and their interactions with the items can be considered as next layer of interaction and so on. One thing can be understood from here that the pair of items and their feature information is used to learn the taste of the users which can be seen as neighborhood information in terms of features for the item pair. Considering the above scenario for user-item interaction the message from the item pair p_i , can be defined as:

$$\text{msg}_{u \leftarrow p_i} = f(\pi_{p_i}, e_u, k_{u\pi_i}) \quad (3)$$

Here $\text{msg}_{u \leftarrow p_i}$ is the information to be propagated (i.e., message embedding). $f()$ is the encoding function that is responsible for taking user and item pair embeddings, as represented in Eq. (3) and uses the coefficient term ' $k_{u\pi_i}$ ' to regulate the decay factor on every propagation on edge u, p_i . The encoding function in our work is implemented as:

$$\text{msg}_{u \leftarrow p_i} = \frac{1}{\sqrt{|N_u| \parallel N_{p_i}|}} \left(W_1 e_{p_i} + W_2 (e_{p_i} \odot e_u) + W_3 (e_i \odot e_j) \right) \quad (4)$$

Here, W_1, W_2 are two real-valued learn-able weight matrices having dimensional $d' \times d$, where d' is the transformation size. In contrary to convolution neural network here the encoding of the user and item pair interaction is being done on the element wise product (denoted as $\odot$ of the respective embedding). Here we have introduced another weight matrix in addition to NGCF (Wang, He, Wang, Feng, & Chua, 2019), i.e. W_3 , having same dimension which holds the embedding of the side information for the item pair ' p_i ', where p_i is the item pair consists of two items (i, j) . The use of this information is crucial when we have sparsity in user-item interaction matrix.

Further, $\frac{1}{\sqrt{|N_u| \parallel N_{p_i}|}}$ is the graph Laplacian norm, where N_u and N_{p_i} are the first order neighbors of user u and item pair p_i . From the bipartite graph representation it shows how the item features and

historical behavior of the user contributes towards the preference (PR for the item pair). In terms of message passing, $k_{u\pi_i}$ can be represented as a decay factor, where the information propagated should reduce with the length of the path.

Aggregation of information. Since we have multiple layers of user-item embedding information, the information must be aggregated and propagated to the next layer. Now here the information (message) propagated from u 's neighbors to reconstruct the u 's embedding information. This is basically user-user CF, where message is being passed from similar users to the user u . The aggregation function for the single layer can be represented as:

$$e_u^{(1)} = \text{LeakyReLU} \left(\text{msg}_{u \leftarrow u} + \sum_{j \in N_u} \text{msg}_{u \leftarrow j} \right) \quad (5)$$

Here, $e_u^{(1)}$ denotes the embedding representation of user u for layer-1 or first layer. We have used the LeakyReLU (Maas, Hannun, Ng, et al., 2013) activation function which is capable of encoding both positive and negative signals. The existing information possessed by user u is preserved using $\text{msg}_{u \leftarrow u}$ and the information obtained from neighbor is aggregated.

For propagating information across multiple layers, we can integrate more embedding propagation layers to construct high-order connectivity information. This is very important in CF models, as they capture the higher order interaction among user-item pairs. The first part discussed earlier captures only the second-order interaction. Hence, we can modify Eq. (5) to provide an approach to propagate embedding information across different layers.

$$e_u^{(l)} = \text{LeakyReLU} \left(\text{msg}_{u \leftarrow u}^{(l)} + \sum_{j \in N_u} \text{msg}_{u \leftarrow j}^{(l)} \right) \quad (6)$$

In the above equation the information being forwarded as follows:

$$\begin{aligned} \text{msg}_{u \leftarrow j}^{(l)} &= k_{u\pi_i} \left(W_1^{(l)} e_{p_i}^{(l-1)} + W_2^{(l)} (e_{p_i}^{(l-1)} \odot e_u^{(l-1)}) + W_3 (e_i^{(l)} \odot e_j^{(l)}) \right) \\ \text{msg}_{u \leftarrow u}^{(l)} &= W_1^{(l)} e_u^{(l-1)} \end{aligned} \quad (7)$$

Here $W_1^{(l)}$, $W_2^{(l)}$ are two learn-able transformation matrices of dimension d_l ; $e_{p_i}^{(l-1)}$ is the item pair embedding information generated

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 3

Балл: 10

Переведите текст с английского на русский язык. Для упрощения ввода формул рекомендуем выполнять задание на бумажных листах.

2. Main theorem and its proof

We observe that not every $2K_2$ -free graph is C_5 -free. Thus [Theorem A](#) can't cover all the $2K_2$ -free graphs. In this paper, we give the best possible upper bound of the secure domination number in $2K_2$ -free graphs as follows.

Theorem 1. $\gamma_s(G) \leq \alpha(G) + 1$ for every $2K_2$ -free graph G .

Proof. Let G be a $2K_2$ -free graph. Obviously, [Theorem 1](#) is true if G is complete. Thus we assume G is not complete. Then $\alpha(G) \geq 2$. Let D be a maximum independent set of G . Clearly, D is a dominating set of G with $|D| \geq 2$. If D is secure, then $\gamma_s(G) \leq \alpha(G) < \alpha(G) + 1$, and we are done. Suppose D is not secure.

We claim that $G[epn(z, D)]$ is a clique for each vertex $z \in D$ with $epn(z, D) \neq \emptyset$. Otherwise, suppose $z_1 z_2 \notin E(G)$ for a vertex $z \in D$ and a pair of vertices $z_1, z_2 \in epn(z, D)$. Let $D' = (D - \{z\}) \cup \{z_1, z_2\}$. Then D' is an independent set of G with $|D'| > |D|$, a contradiction.

Moreover, we claim that $G[epn(x, D) \cup epn(y, D)]$ is a clique for each pair of vertices $x, y \in D$ with $epn(x, D) \cup epn(y, D) \neq \emptyset$. By the above result, it suffices to prove $x_1 y_1 \in E(G)$ for each pair of vertices $x_1 \in epn(x, D)$, $y_1 \in epn(y, D)$. Clearly, $x y, x_1 y, y_1 x \notin E(G)$, which implies $x_1 y_1 \in E(G)$ since G is $2K_2$ -free.

Since D is not secure, assume u is a D -undefended vertex in $V(G) - D$. Let $u_1 \in N(u) \cap D$ and $w_1 \in epn(u_1, D)$ with $w_1 u \notin E(G)$. We set $D^* = D \cup \{w_1\}$. Clearly, D^* is a dominating set of G .

Next, we claim $epn(z, D^*) = \emptyset$ for each vertex $z \in D^*$. Since D is a maximum independent set, each vertex in $N(w_1) \cap (V(G) - D^*)$ is adjacent to some vertex in $D^* - \{w_1\}$, which implies $epn(w_1, D^*) = \emptyset$. By $D \subset D^*$, we have $epn(z, D^*) \subseteq epn(z, D)$ for each vertex $z \in D^* - \{w_1\}$. Suppose $epn(u_1, D^*) \neq \emptyset$. Let $x \in epn(u_1, D^*)$. Then $x \in epn(u_1, D) - \{w_1\}$. We have $x w_1 \in E(G)$ since $G[epn(u_1, D)]$ is a clique, a contradiction to $N(x) \cap D^* = \{u_1\}$. Thus $epn(u_1, D^*) = \emptyset$. Suppose $v \in D^* - \{u_1, w_1\}$ such that $epn(v, D^*) \neq \emptyset$. Let $v' \in epn(v, D^*)$. Since $epn(v, D^*) \subseteq epn(v, D)$ and $G[epn(v, D) \cup epn(u_1, D)]$ is a clique, we have $w_1 v' \in E(G)$, a contradiction to $N(v') \cap D^* = \{v\}$. Thus $epn(v, D^*) = \emptyset$. It follows that $epn(z, D^*) = \emptyset$ for each vertex $z \in D^*$, which implies D^* is secure. Thus $\gamma_s(G) \leq |D^*| = \alpha(G) + 1$. $\square$

Let $A = \{u_1, \dots, u_m\}$, $B = \{v_1, \dots, v_m\}$, $m \geq 1$, and $H = mK_2$ such that $V(H) = A \cup B$ and $E(H) = \{u_i v_i : u_i \in A, v_i \in B, 1 \leq i \leq m\}$. Assume $G_1 = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_1$ is a 5-cycle and $G_2 = \bar{H}$. Let G be a graph (see [Fig. 1](#)) such that $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ and $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x w_i : x \in A, i \in \{1, 2, 3, 5\}\} \cup \{y w_j : y \in B, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. If $m = 0$, then let $G = G_1$. We can verify that G is a $2K_2$ -free graph of order $2m + 5$ with $\alpha(G) = 2$ and $\gamma_s(G) = 3$. Moreover, $G' = G \cup nK_1$ is a $2K_2$ -free graph with $\alpha(G') = n + 2$ and $\gamma_s(G') = n + 3$, where $n \geq 1$. Thus the bound in [Theorem 1](#) is best possible.

For every disconnected $2K_2$ -free graph with non-empty edge set, each component of it except for one is isomorphic to K_1 . As we see, the above sharpness example G' is disconnected, and the exactly one component with non-empty edge set is the graph G with $\alpha(G) = 2$ and $\gamma_s(G) = 3$. In order to avoid the triviality, we need to give a connected $2K_2$ -free graph with independence number at least 3 as a sharpness example. Thus we propose the following problem.

Для регулирования размера изображений с заданиями можете использовать масштаб страницы или открыть в отдельном окне, но не забывайте в таком случае следить за таймером.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 4

Балл: 10

Переведите текст с английского на русский язык. Для упрощения ввода формул рекомендуем выполнять задание на бумажных листах.

Claim 1. Each member of $\mathcal{P}$ is a path of two edges.

Proof. Since G is fragile and a $(1, 3)$ -graph, each component of $G - E(T)$ is a path. If the claim is not true, let $P \in \mathcal{P}$ with $|E(P)| \geq 3$. Let $P = u_1 u_2 \dots u_k$, $k \geq 4$. Let $W = w_0 w_1 \dots w_{t-1} w_t$ be the unique path in T connecting u_2 and u_3 , where $w_0 = u_2$ and $w_t = u_3$. Then $C = W + u_2 u_3$ is the fundamental cycle of $u_2 u_3$ with respect to T . If $d_T(w_i) = 3$ for some i , $1 \leq i \leq t-1$, let e_i be an edge incident with w_i in C , then $T' = T + u_2 u_3 - e_i$ is a spanning tree of G . We observe that every internal vertex of a path in $\mathcal{P}$ is a leaf of T while every endpoint of a path in $\mathcal{P} \cup M$ is internal in T and has degree 2 in T . Thus, $P - u_2 u_3$ are two components of $G - E(T')$ and the existence of e_i in $G - E(T')$ does not decrease the number of components because $d_T(w_i) = 3$. It follows that $G - E(T')$ has more components than $G - E(T)$ does, contradicting the choice of T . Thus, $d_T(w_i) = 2$ for every i , $1 \leq i \leq t-1$, which implies that C is a hamiltonian cycle of G and G is cubic. Let D be a smallest cycle in G that contains exactly one edge not in C . Then, $G - E(D)$ is connected, contradicting that G is fragile. This proves Claim 1.

Claim 2. G contains no triangle.

Proof. Suppose, to the contrary, that R is a triangle in G . Let $V(R) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Since G is a $(1, 3)$ -graph, there are $y_i \in V(G)$ such that $y_i x_i \in E(G)$, $1 \leq i \leq 3$. We distinguish two cases.

Case 1. All the three y_i 's are distinct. Let G^* be the graph obtained from G by contracting R into a single vertex x^* . Then G^* is simple and also a $(1, 3)$ -graph. By the minimality of G , G^* has a $(T^*, M^*, \mathcal{P}^*)$ -decomposition, where T^* is a spanning tree of G^* , M^* a matching, and $\mathcal{P}^*$ a set of vertex-disjoint paths of two edges such that $|\mathcal{P}^*| \leq |M^*|$.

Let $B = \{x^* y_1, x^* y_2, x^* y_3\}$ be the set of three edges incident with x^* in G^* . If $|B \cap E(T^*)| = 3$, let $T = T^* + x_1 x_2 + x_2 x_3$, $M = M^* + x_1 x_3$, and $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$; If $|B \cap E(T^*)| = 2$, say $B \cap E(T^*) = \{x^* y_1, x^* y_2\}$, let $T = T^* + x_1 x_3 + x_3 x_2$, $M = M^* + x_1 x_2$, and $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$; If $|B \cap E(T^*)| = 1$, say $B \cap E(T^*) = \{x^* y_1\}$, then $y_2 x^* y_3$ is a member of $\mathcal{P}^*$, let $T = T^* + x_1 x_2 + x_2 x_3$, $M = M^* + x_2 y_2$, and $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* - y_2 x^* y_3 + x_1 x_3 y_3$. In any case, $|\mathcal{P}| \leq |M|$ and $\{T, M, \mathcal{P}\}$ is a decomposition of G , contradicting that G is a counterexample.

Case 2. Not Case 1. Since G is fragile, G is not the complete graph on 4 vertices, and thus it cannot be that $y_1 = y_2 = y_3$. Without loss of generality, we assume that $y_1 \neq y_2$ and $y_2 = y_3$. It follows, since G is a $(1, 3)$ -graph, that there is $z \in V(G) \setminus \{x_2, x_3\}$ adjacent to y_2 , and since G is fragile, $z \neq y_1$. Let G^* be the graph obtained from G by deleting $V(R) \cup \{y_2\}$ and adding a new edge zy_1 . Since G is fragile, $G - E(R)$ is disconnected, which means that zy_1 is a cut edge of G^* . By the minimality of G , G^* has a $(T^*, M^*, \mathcal{P}^*)$ -decomposition, where T^* is a spanning tree of G^* , M^* a matching, and $\mathcal{P}^*$ a set of vertex-disjoint paths of two edges such that $|\mathcal{P}^*| \leq |M^*|$.

Since zy_1 is a cut edge of G^* , we have that $zy_1 \in E(T^*)$. Let $T = T^* - zy_1 + zy_2 x_2 x_3 x_1 y_1$, $M = M^* + x_1 x_2 + x_3 y_3$, and $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$. Clearly, $|\mathcal{P}| \leq |M|$ and $\{T, M, \mathcal{P}\}$ is a decomposition of G , a contradiction. This completes the proof of Claim 2.

Для регулирования размера изображений с заданиями можете использовать масштаб страницы или открыть в отдельном окне, но не забывайте в таком случае следить за таймером.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 5

Балл: 10

Переведите текст с английского на русский язык. Для упрощения ввода формул рекомендуем выполнять задание на бумажных листах.

Conjecture 1 (Akbari et al., [1]). For a graph G , and a mapping $F : V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, if

$$|F(v)| \leq \frac{1}{2}(d_G(v) - 1)$$

for every $v \in V(G)$, then G is F -avoiding.

In the same paper, Akbari et al. [1] proved that Conjecture 1 holds for bipartite graphs. Bradshaw et al. made some progress on Conjecture 1: they [4] proved if $|F(v)| \leq |d_G(v)|/3$ for every $v \in V(G)$, then G is F -avoiding. Ma and Lu [8] gave a characterization for a connected graph G to have an H -orientation if $H : V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ such that

$$i \notin H(v) \text{ implies } i + 1 \in H(v), \text{ for every } i \in \mathbb{N}, v \in V(G).$$

Let $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ such that $g(v) \equiv f(v) \pmod{2}$ for all $v \in V(G)$. An H -orientation O of G is called a (g, f) -parity orientation if $H(v) = \{g(v), g(v) + 2, \dots, f(v)\}$ for all $v \in V(G)$. So a (g, f) -parity orientation O satisfies the following condition:

$$g(v) \leq d_O^+(v) \leq f(v) \text{ and } d_O^+(v) \equiv f(v) \pmod{2} \text{ for every } v \in V(G).$$

A spanning subgraph F of G is called a (g, f) -parity factor if

$$g(v) \leq d_F(v) \leq f(v) \text{ and } d_F(v) \equiv f(v) \pmod{2}$$

for every $v \in V(G)$. For $U \subseteq V(G)$, we use $f(U), g(U)$ to denote $\sum_{v \in U} f(v)$ and $\sum_{v \in U} g(v)$, respectively.

In this paper, we give a characterization for a graph to have a (g, f) -parity orientation.

Theorem 2. Let G be a graph without isolated vertices, and $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ be functions such that $g(v) \leq f(v)$ and $g(v) \equiv f(v) \pmod{2}$ for every $v \in V(G)$. Then G has a (g, f) -parity orientation if and only if for any two disjoint subsets S and T of $V(G)$,

$$\eta_G(S, T) = (f(S) - e_G(S)) + \left(\sum_{v \in T} d_G(v) - e_G(T) - g(T) \right) - q_G(S, T) \geq 0 \quad (1)$$

where $q_G(S, T)$ denotes the number of connected components C of $G - (S \cup T)$ such that

$$f(C) + e_G(C) + e_G(S, C) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (2)$$

The rest of this paper is organized as follows. Firstly, we employ the technique of subdivision to link parity orientations with the parity factors. Secondly, we utilize the characterization of these parity factors to prove our main result.

2. Proof of Theorem 2

For completing the proof of Theorem 2, we need the following result obtained by Lovász [7].

Theorem 3. Let G be a graph, and let $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ be two functions such that $g(v) \leq f(v)$ and $g(v) \equiv f(v) \pmod{2}$ for every $v \in V(G)$. Then G has a parity factor if and only if for all disjoint subsets S and T of $V(G)$, it follows that

$$\delta_G(S, T) = f(S) - g(T) + \sum_{v \in T} d_{G-S}(v) - q_G(S, T; f) \geq 0 \quad (3)$$

where $q_G(S, T; f)$ denotes the number of components C (also called f -odd component) of $G - (S \cup T)$, such that

$$f(C) + e_G(C, T) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4)$$

Для регулирования размера изображений с заданиями можете использовать масштаб страницы или открыть в отдельном окне, но не забывайте в таком случае следить за таймером.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 6

Балл: 10

Let $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ satisfy

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + 3x_3 - x_4 = b_1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = b_2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + a_2x_4 = b_3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = b_4. \end{cases}$$

Find

$$\frac{\partial x_i}{\partial b_j}$$

for all i and j and arbitrary $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 7

Балл: 10

Determine all functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfy

$$(f(a) - f(b))(f(b) - f(c))(f(c) - f(a)) = f(ab^2 + bc^2 + ca^2) - f(a^2b + b^2c + c^2a)$$

for all real numbers a, b, c .

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 8

Балл: 10

Solve

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 - x_1 - 3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + b, \\ \dot{x}_3 = x_2 - cx_3 + 1, \end{cases}$$

for arbitrary $a, b, c \in \mathbb{R}$, if

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.$$

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикреплёния (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 9

Балл: 10

Let there is a function

```

1  def my_count(n):
2      s=0
3      for i in range(n):
4          for j in range(i):
5              for k in range(j, i):
6                  s=s+1
7      return s

```

Find a short formula to calculate $\text{my_count}(n)$.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикрепленном документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикрепленном листе 1»)

Вопрос 10

Балл: 10

Let n and k be positive integers. Prove that for $a_1, \dots, a_n \in [1, 2^k]$ one has

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}.$$

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикрепленном документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикрепленном листе 1»)

Вопрос 11

Балл: 10

Calculate

$$\int_0^1 \left(\int_1^x \left(\int_1^y dz \right)^a dy \right)^b dx$$

for arbitrary $a, b \in \mathbb{R}$.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикрепленном документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикрепленном листе 1»)

Вопрос 12

Балл: 10

Let there are uniformly distributed random variables

$$x_1 \sim U(0, a_1), x_2 \sim U(0, a_2), x_3 \sim U(0, a_3), x_4 \sim U(0, a_4),$$

and $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ be given.

Find the exact value of the probability $p(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1)$.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикрепленном документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикрепленном листе 1»)

Вопрос 13

Балл: 10

Find all functions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ such that

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2$$

for all $n \in \mathbb{Z}$.

Вы можете прикрепить в ответ на это задание решение на листах бумаги. На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 14

Не оценен

Сюда вы можете загрузить черновики на проверку

На загрузку файлов выделяются последние 15 минут состязания. Вы можете завершить работу досрочно и прикрепить файлы раньше, но после прикрепления (фотографирования/сканирования) продолжать решать задания запрещено.

Перед загрузкой в систему покажите на камеру листы с выполненной работой. Затем сфотографируйте/отсканируйте листы и загрузите в систему.

**При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу :
Черновики в прикреплённом документе**

Вы зашли под именем ()