



Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1-3. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Математические методы анализа в экономике»: задания № 4-11.
- Трек «Математические методы в социологии»: задания № 12-13.
- Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»: задание № 14-18.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться решить наибольшее число задач вне зависимости от треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Во время выполнения заданий вы можете использовать встроенный в систему калькулятор.

Работа оформляется в письменном виде на чистых листах А4. Во время выполнения заданий можно пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги, перед началом олимпиады покажите их на камеру). Фото/сканы рукописной работы загружаются в тестирующую систему **в конце состязания** (на это у вас будет 15 минут).

Обратите внимание на то, что черновики к проверке **не принимаются**.

Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 14,00

Каждый день в течение 100 дней Мария добиралась с работы домой на такси, выбирая каждый раз один из четырех тарифов: «Эконом», «Комфорт», «Комфорт +» и «Бизнес». Аналитика из компании, предоставляющей услуги такси, доступны следующие данные о тарифах поездок Марии: 24 раза она выбирала «Эконом», 56 раз — «Комфорт», 16 раз — «Комфорт +» и 4 раза — «Бизнес». С помощью критерия хи-квадрат аналитик решил протестировать гипотезу о том, что Мария выбирает «Эконом» и «Комфорт» с равной вероятностью, а «Комфорт+» и «Бизнес» тоже с равными вероятностями, которые в два раза меньше вероятности выбрать «Эконом». На уровне значимости 5% проверьте гипотезу, выдвинутую аналитиком компании.

Примечание: $\chi^2_{0.95,1} \approx 3.84$, $\chi^2_{0.95,2} \approx 0.71$, $\chi^2_{0.95,3} \approx 5.99$, $\chi^2_{0.95,4} \approx 9.49$.

Вопрос 2

Балл: 14,00

Вам известны 4 уравнения, показывающие зависимость Y от X . В каждом из уравнений Y – балл студента за первый тест по курсу “Математическая статистика”, а X – балл ЕГЭ по профильной математике. Оба балла могут принимать значения от 0 до 100. Каждое из уравнений описывает студентов-социологов 2 курса бакалавриата, которые в 10-11 классах школы учились в разных профильных классах (гуманитарный, естественно-научный, технологический и социально-экономический). Вы знаете, что больше всего на 2-м курсе обучается выпускников социально-экономических классов и то, что все регрессионные коэффициенты статистически значимы. Отвечая на вопросы задания предположите, что имеет место взаимодействие между баллами ЕГЭ и профилем обучения в старших классах школы.

Гуманитарный класс: $Y = 5 + 0,65 \cdot X$

Естественно-научный класс: $Y = 15 + 0,8 \cdot X$

Технологический: $Y = 20 + 0,76 \cdot X$

Социально-экономический: $Y = 10 + 0,7 \cdot X$

1. Напишите общее уравнение регрессии для всех студентов-социологов 2 курса бакалавриата, предварительно обосновав выбор контрольной группы.
2. Содержательно проинтерпретируйте каждый регрессионный коэффициент полученного уравнения.

Вопрос 3

Балл: 14,00

Дана матрица оператора A_φ . Найдите значения параметра t при которых Жорданова форма матрицы A_φ будет содержать Жорданову клетку размера 4×4 , ответ обоснуйте.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & t-1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & t-2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & t-3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Вопрос 4

Балл: 7,25

Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$.

Вопрос 5

Балл: 7,25

Последовательность (a_k) задана рекуррентным соотношением:

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{1+a_k}{2}}$$

и начальным условием: $a_0 = \frac{5}{3}$. Найдите бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

или докажите, что это произведение расходится.

Вопрос 6

Балл: 7,25

Решите дифференциальное уравнение $\left(\frac{x^2}{y} + 2x^3 - y \right) dx + \left(x + 2xy^2 - \frac{x^3}{y^2} \right) dy = 0$.

Вопрос 7

Балл: 7,25

Для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ и натурального числа k действительную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ назовем

– X -матрицей, если все ее элементы принадлежат множеству X , т.е.

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) a_{ij} \in X.$$

– k -квазиразреженной, если ее минимальный элемент встречается в ней не менее k раз, т.е.

$$\left| \left\{ (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} = \min_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right\} \right| \geq k.$$

Пусть $n(k)$ есть минимальное натуральное число n , удовлетворяющее следующему условию: для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$, содержащего по крайней мере два элемента, существует хотя бы одна невырожденная k -квазиразреженная X -матрица размера $n \times n$. Найдите $n(4095000)$.

Вопрос 8

Балл: 7,25

Andrew and Ivan compete in the speed of problem solving. They play 10 rounds against each other by solving one problem in each round. All the solution times are independent. The problem solution times for Andrew are exponentially distributed with rate 1. The problem solution times for Ivan are exponentially distributed with unknown rate λ .

In 9 out of the 10 rounds the winner solved the problem in less than one minute.

Find the maximum likelihood estimator of λ .

Вопрос 9

Балл: 7,25

У Артема есть 5 наблюдений за случайной величиной X , имеющей нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2 (к сожалению Артем забыл, чему равна дисперсия, но она точно известна): 2, 5, 7, 4, 12.

а) При проверке гипотезы $H_0 : \mu = 10$ против двусторонней альтернативной гипотезы $H_1 : \mu \neq 10$ Артем получил $p - value = 0.3174$. Чему в таком случае равна дисперсия случайной величины σ^2 ?

б) Далее Артем хочет проверить гипотезу $H_0 : \mu = 10$ против альтернативной $H_1 : \mu = 5$ на уровне значимости 5%. Чему в таком случае равна мощность теста?

Для перехода по ссылке нажмите на неё правой кнопкой мыши и откройте ссылку в новой вкладке/в новом окне. При возникновении проблем скопируйте адрес гиперссылки и вставьте вручную в поисковую строку браузера в новом окне

Вопрос 10

Балл: 7,25

Поставщик взял на себя обязательство доставлять Заказчику не менее одной тонны товара в день. Отправляя товар, Поставщик загружает его ровно одну тонну. Однако, при доставке некоторая часть товара может быть утеряна. В этом случае Поставщик отправляет Заказчику еще одну тонну товара, которая вновь может быть частично утеряна по дороге, и т.д. пока у Заказчика не накопится по крайней мере тонна товара. Будем считать, что (а) доля потерь при каждой доставке есть случайная величина X , равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, (б) все эти случайные величины независимы. Найдите

1. для каждого натурального числа k вероятность того, что Поставщику придется совершить более k рейсов в день,
2. математическое ожидание количества рейсов Поставщика в день.

Вопрос 11

Балл: 7,25

Петя задумал заработать на изготовлении столов и стульев.

С этой целью он взял в аренду два разных станка (строгальный и фрезерный) на пять суток. Аренда строгального станка обошлась даром, а за аренду фрезерного пришлось заплатить семь долларов в час.

Для изготовления одного стола необходимо четыре часа поработать на строгальном станке и один час на фрезерном. Для изготовления одного стула необходимо два часа поработать на строгальном станке и три часа на фрезерном. Работать можно круглые сутки без отдыха.

Рыночная цена одного стола такого типа составляет восемь долларов. Рыночная цена одного стула такого типа составляет семь долларов.

Основной своей задачей Петя видит максимизацию дохода от реализации продукции. Второй по важности задачей он рассматривает минимизацию потерь от простоя станков.

Сколько столов и стульев должен изготовить Петя, чтобы решить поставленные задачи, если он согласен для этого на снижение максимального дохода на 10%. Необходимо рассчитать:

1. производственный план, который максимизирует доход, и сам доход (2 балла)
2. производственный план, который минимизирует потери, и сами потери (2 балла)
3. компромиссный производственный план с указанием дохода и потерь (3.25 балла).

Комментарий. Компромиссный план может содержать дробное число столов и/или стульев.

Вопрос 12

Балл: 58,00

Выберите один из двух вопросов по треку "социология" и напишите мини-эссе по предложенной теме

Вам поставили задачу построить «экономико-идеологическую» карту населения России. Вы решили это сделать с помощью анкетного опроса населения. Какие представления о желаемом характере экономики страны существуют среди россиян? Иначе это можно назвать приверженностью той или

Prikladnaya-matematika

иной хозяйственной идеологии. От чего зависят эти идеологические представления?

Напишите проект исследования по предложенной выше теме. В проект должно входить:

- 1) гипотезы исследования
- 2) описание процедуры измерения (задача и смысл вопросов, характеристика измерительных шкал, формулировки вопросов)
- 3) описание методов анализа данных (какие методы выбраны и почему), а также того, как заложенные в эти методы математические процедуры будут работать с анкетными вопросами, предложенными в п.2
- 4) описание и интерпретация предполагаемых результатов

Вопрос 13

Балл: 58,00

Выберите один из двух вопросов по треку "социология" и напишите мини-эссе по предложенной теме
Вам поставили задачу измерить степень религиозности населения России. Вы решили это сделать с помощью анкетного опроса населения. Что такое религиозность человека и как ее можно измерить в анкетном опросе? Отчего зависит религиозность человека?

Напишите проект исследования по предложенной выше теме. В проект должно входить:

- 1) гипотезы исследования
- 2) описание процедуры измерения (задача и смысл вопросов, характеристика измерительных шкал, формулировки вопросов)
- 3) описание методов анализа данных (какие методы выбраны и почему), а также того, как заложенные в эти методы математические процедуры будут работать с анкетными вопросами, предложенными в п.2
- 4) описание и интерпретация предполагаемых результатов

Вопрос 14

Балл: 11,00

Рассмотрим двухслойную нейронную сеть, выходной вектор которой определяется формулой

$$x_j^2 = \sigma \left(\sum_{k=1}^M W_{jk}^2 x_k^1 - b_j^2 \right),$$

$j = 1, 2 \dots S$, компоненты вектора внутреннего слоя определяются аналогично

$$x_k^1 = \sigma \left(\sum_{i=1}^N W_{ki}^1 x_i^0 - b_k^1 \right),$$

S – число нейронов выходного слоя, M – число нейронов внутреннего слоя, N – число признаков, x_i^0 – числовые признаки или компоненты вектора входного слоя, $i=1, 2 \dots N$.

Пусть входной слой состоит только из 2 нейронов, $N=2$, признаки x_1^0 и x_2^0 принимают только значения 0 или 1, σ – функция активации, которая в данном случае может быть любой функцией. Промежуточный слой также содержит 2 нейрона, т.е. $M = 2$. Выходной слой состоит из одного нейрона, $S=1$. Известно, что любая булева функция может быть приведена к дизъюнктивной нормальной форме. Отсюда следует, что любая булева функция может быть реализована с помощью двухслойной нейронной сети. Подберите такую функцию активации и такие значения весов W_{ki}^l и b_j^l , $l=1, 2$, чтобы данная нейронная сеть имитировала логическую операцию “исключающего ИЛИ”, которая задается таблицей

$1 \oplus 1$	$0 \oplus 0$	$1 \oplus 0$	$0 \oplus 1$
0	0	1	1

Выпишите полученные значения весов (9 параметров модели) и укажите вид функции активации.

Вопрос 15

Балл: 13,00

Дана строка (последовательность символов) длины N . Необходимо найти максимальную по длине подстроку, в которой все символы уникальны. Напишите алгоритм минимальной вычислительной

сложности (в среднем). Оцените использование дополнительных ресурсов (памяти) своего алгоритма.

Вопрос 16

Балл: 11,00

Число страховых случаев на $[0, t]$ образует пуассоновский процесс с параметром $\lambda = 3$. Найти условное распределение количества страховых случаев на $[0, 10]$, если известно, что на $[0, 15]$ их было ровно 4, т.е. $P(N(10) = i | N(15) = 4)$, $i = 0, \dots, 4$, и математическое ожидание для этого распределения.

Вопрос 17

Балл: 12,00

Пусть $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ – решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

где $a, b, c, d = \text{const} \in \mathbb{R}$, t – вещественная независимая переменная, $x(t), y(t)$ принимают вещественные значения.

Известно, что существуют конечные пределы: $x(t) \rightarrow \alpha$, $y(t) \rightarrow \beta$ при $t \rightarrow +\infty$, где $\alpha, \beta = \text{const} \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$?

Вопрос 18

Балл: 11,00

Рассмотрим систему, которая состоит из одного прибора обслуживания. В систему поступают заявки в соответствии с независимыми однородными процессами Пуассона от двух (независимых) источников, заявки типа A с первого источника и заявки типа B со второго источника. За минуту в среднем поступают 6 заявок типа A и 4 заявки типа B . Алгоритм обслуживания следующий: если заявка поступает в систему и прибор свободен, то немедленно начинается обслуживание поступившей заявки. Если прибор занят, то заявка не входит в систему и теряется. После обслуживания прибором заявка выходит из системы. Предполагается, что времена обслуживания любой заявки (независимо от ее типа) прибором - независимые случайные величины, распределенные по показательному закону со средним $m = 5$ секунд.

Построить математическую модель системы обслуживания в виде однородного марковского случайного процесса.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ система свободна (прибор не занят).

1. Найти вероятность того, что первые три заявки в потоке заявок в систему будут иметь тип A .
2. Найти вероятность того, что в момент времени $t = 20$ секунд система будет свободна (прибор не занят).
3. В установившемся режиме вычислить вероятность того, что поступившая заявка будет потеряна (не обслужена).
4. В установившемся режиме вычислить среднее число потерянных заявок типа A за 1 час работы системы.

Вы зашли под именем ()