

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников “Высшая лига”
по направлению «Математика»**

Время выполнения задания — 210 минут

Стоимость каждой задачи указана возле задачи. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100 баллов, то результат приравнивается к 100 баллам.

1. **[20 баллов]** Матрицы A, B размера $n \times n$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют условию $ABA = 0$. Докажите, что $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

2. **[20 баллов]** Определим функцию $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $I(s) = \int_1^{\infty} \frac{t^{-1/2} dt}{1+t^2 s}$. Найдите такие $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{Q}$, такие что

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{I(s)}{Cs^\alpha} = 1.$$

3. **[20 баллов]** Функция $y(t)$ определена на $(a, b) \subset \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + y^5 - 5y = 0$, причём $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Докажите что $y(t)$ продолжается до периодического решения определенного на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

4. **[20 баллов]** Покажите, что абелева группа порядка 2025 не может действовать точно на множестве из 13 элементов. Действие называется *точным*, если каждый элемент отличный от единицы действует нетривиально.

«Математика»

5. **[30 баллов]** Существует ли непрерывная непостоянная функция определённая на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, такая, что для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$f(ax + by, cx + dy) = f(x, y)$$

для любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

6. **[30 баллов]** Пусть f многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Докажите, что существует z такое, что $|f(z)| \leq 1$ и $|f'(z)| \geq n$.

«Математическая физика»

7. **[30 баллов]** Движение происходит в вертикальной плоскости (xOy) , поле тяжести $\vec{g}$ направлено против оси Oy : $\vec{g} = (0, -g)$. Определите, при каких значениях параметра α лыжник в какой-то момент после старта оторвется от поверхности трамплина и найдите координаты точки отрыва.

8. **[30 баллов]** Заряд q неподвижно закреплен в пространстве $\mathbb{R}^3$, второй заряд противоположного знака $-q$ и массы m может двигаться без трения по прямой, расположенной на расстоянии ℓ от закрепленного заряда. Подвижный заряд совершает малые колебания вокруг положения равновесия, причем скорость его движения много меньше скорости света c . Иные силы, кроме электростатической силы Кулона, в системе отсутствуют.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

- а) Сформулируйте модельные ограничения “малые колебания” и “много меньше скорости света” в виде соотношений на параметры задачи и определите период малых колебаний подвижного заряда, пренебрегая потерями на электромагнитное излучение.
- б) Определите в дипольном приближении относительную потерю энергии $\Delta E/E$ системы зарядов за один период колебаний, считая эту величину много меньше 1. Здесь E — полная энергия системы, ΔE — энергия, унесенная дипольным излучением за один период.