

**Критерии оценки задач олимпиады "Высшая лига" по
направлению "Математика", 2025 год**

Задача 1

[10 баллов] Доказано, что матрица AB нильпотентна.

[1 балл] Доказано только для случая невырожденной матрицы A .

Задача 2

[до 7 баллов] Получено и обосновано верное значение α .

[0 баллов] Замены переменных, не приводящие интеграл к виду

$$s^\alpha \int (\text{выражение, не зависящее от } s) dt.$$

[до 13 баллов] Получено и обосновано верное значение C .

[до 10 баллов] Вычислено явное значение первообразной интеграла, но не получен численный ответ.

[до 4 баллов] Задача сведена к подсчёту B - или Γ -функции, вычетов или подобному нечисловому выражению.

[до -2 баллов] За каждую незначительную арифметическую ошибку, не влияющую на ход решения.

Задача 3

[3 балла] Доказано, что функция $y'(t)^2 + \frac{y(t)^6}{3} - 5y(t)^2$ постоянна.

[-6 баллов] Доказано, что решение продолжается на всю вещественную ось и что фазовая кривая $(y(t), y'(t))$ ограничена и замкнута, но нет достаточного обоснования периодичности решения.

Задача 4

[до -6 баллов] Неполное объяснение факта: если перестановки порядков 5^p и 3^q коммутируют, то их 5^p - и 3^q -циклы не пересекаются.

[до -3 баллов] Решение опирается на предположение, что элемент порядка p (например, образующая подгруппы $\mathbb{Z}_{/(p)}$) обязательно состоит из *единственного* p -цикла.

[1 балл] Показано, что задача эквивалентна задаче: доказать, что в S_{13} нет абелевой подгруппы порядка 2025.

[1 балл] Показано, что в разложение абелевой группы входит $\mathbb{Z}_{/(5)} \oplus \mathbb{Z}_{/(5)}$.

[1 балл] Показано, в разложение абелевой группы входит $\mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)}$.

Задача 5

[5 баллов] Доказано, что $f(1, 0) = f(a, b)$ для любых целых взаимно простых a и b .

[5 баллов] Сформулировано, но не доказано утверждение о том, что точки вида $(\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ для натурального n и целых взаимно простых a и b всюду плотны в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

[5 баллов] Задача доказана в предположении, что точки вида $(\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ для натурального n и целых взаимно простых a и b всюду плотны в $\mathbb{R}^2$.

Задача 6

[1 балл] Упоминание принципа максимума без дальнейших продвижений.

Задача 8

Пункт а) — 12 баллов.

[2 балла] Условие малости колебаний $X_0/\ell \ll 1$.

[до 6 баллов] Выражение для угловой частоты или периода движения в гармоническом приближении.

[до 4 баллов] Явное ограничение на параметры q , ℓ , X_0 и m , следующее из требования нерелятивистского движения $v/c \ll 1$.

Пункт б) — 18 баллов.

[до 5 баллов] Верное выражение для мгновенной мощности $P(t)$ потерь на излучение в дипольном приближении.

[до 10 баллов] Верный подсчет потери энергии за один период.

[до 3 баллов] Верное отношение потери энергии к полной энергии заряда.