

**Решения задач олимпиады "Высшая лига" по направлению
"Математика"**

Задача 1. Матрицы A, B размера $n \times n$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют условию $ABA = 0$. Докажите, что $\text{tr}(AB) = 0$.

Решение. Домножим $ABA = 0$ справа на матрицу B . Получим, $(AB)^2 = 0$. Значит, матрица AB нильпотентна. Отсюда следует, что $\text{tr}(AB) = 0$ (например, потому что все собственные значения нильпотентной матрицы равны 0, а след является суммой собственных значений). $\square$

Задача 2. Определим функцию $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $I(s) = \int_1^\infty \frac{t^{-1/2} dt}{1+t^2 s}$. Найдите такие $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{Q}$, такие что

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{I(s)}{Cs^\alpha} = 1.$$

Решение. Произведём две замены переменных в интеграле: сначала $u = t^{1/2}$, $du = \frac{1}{2}t^{-1/2} dt$, затем $v = s^{1/4}u$, $dv = s^{1/4} du$.

$$I(s) = \int_1^\infty \frac{t^{-1/2} dt}{1+t^2 s} = 2 \int_1^\infty \frac{du}{1+u^4 s} = 2s^{-1/4} \int_{s^{1/4}}^\infty \frac{dv}{1+v^4}.$$

Получаем:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{I(s)}{Cs^\alpha} = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2 \int_{s^{1/4}}^\infty \frac{dv}{1+v^4} \cdot \frac{1}{C} \cdot s^{-\frac{1}{4}-\alpha}. \quad (1)$$

Заметим, что $\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{s^{1/4}}^\infty \frac{dv}{1+v^4}$ существует и

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{s^{1/4}}^\infty \frac{dv}{1+v^4} = \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^4} =: K,$$

поскольку последний интеграл сходится.

Значит, предел (1) равен 1 тогда и только тогда, когда $\alpha = -1/4$, $C = 2K$. Действительно, если $\alpha < -1/4$, то предел (1) равен 0, а если $\alpha > -1/4$, то предел (1) равен ∞ . Если $\alpha = -1/4$, то предел (1) равен $\frac{2K}{C}$.

Остаётся вычислить значение K и подставить в выражение $\frac{2K}{C} = 1$, $C = 2K$. Мы приводим два способа вычисления интеграла.

Первый способ: через вычеты.

На комплексной плоскости рассмотрим контур C_R , состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной прямой и дуги $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Re}(z) > 0\}$ для $R \in \mathbb{R}_{>0}$.

Тогда

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^R \frac{dv}{1+v^4} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^4}. \quad (2)$$

При этом

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \text{ поскольку } \left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Значит,

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dv}{1+v^4} = 2 \int_0^R \frac{dv}{1+v^4} = 2K.$$

С другой стороны, интеграл в левой части (2) может быть явно вычислен через вычеты полюсов внутри контура C_R . При $R > 1$ в контур C_R попадают два простых полюса функции $\frac{1}{1+z^4}$: $e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{(1+z^4)'|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}} + \frac{1}{(1+z^4)'|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4(e^{i\frac{\pi}{4}})^3} + \frac{1}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\pi i \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Второй способ: разложением рациональной функции.

Методом неопределённых коэффициентов можно получить следующее разложение:

$$\frac{1}{1+v^4} = \frac{1}{(v^2 + \sqrt{2}v + 1)(v^2 - \sqrt{2}v + 1)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}v + \frac{1}{2}}{v^2 + \sqrt{2}v + 1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}v - \frac{1}{2}}{v^2 - \sqrt{2}v + 1},$$

откуда вычисляем интеграл:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \frac{\left(v + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(v + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dv - \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \frac{\left(v - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(v - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dv = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^\infty \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}} dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^\infty \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}} dx \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^\infty \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}} dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^\infty \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}} dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{2}} dx \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{x}{x^2 + \frac{1}{2}}$ — нечётная функция, поэтому $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{2}} dx = 0$. Нако-

нец,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2x^2 + 1} dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2x^2 + 1} dx \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{arctg} y \Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} + \operatorname{arctg} y \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем: $C = 2K = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\alpha = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

□

Задача 3. Функция $y(t)$ определена на (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + y^5 - 5y = 0$, причём $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Докажите, что $y(t)$ продолжается до периодического решения определённого на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Решение. Перепишем равенство из условия в виде

$$y'' = -y^5 + 5y. \quad (3)$$

Домножим обе части на y' и проинтегрируем полученное равенство что для любого $t \in (a, b)$ выполнено

$$\int y'' y' dt = \int (-y^5 y' + 5y y') dt,$$

откуда для любого $t \in (a, b)$

$$\frac{y'(t)^2}{2} = -\frac{y(t)^6}{6} + \frac{5y(t)^2}{2} + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$. Подставляя $t = 0$, находим $C = \frac{1}{2}$. Полученное равенство можно записать в виде

$$y'(t)^2 = -\frac{y(t)^6}{3} + 5y(t)^2 + 1.$$

Обозначим

$$f(x) = -\frac{x^6}{3} + 5x^2 + 1.$$

Поскольку значения f ограничены сверху (это многочлен чётной степени с отрицательным старшим коэффициентом), то производная $y'(t)$ ограничена для любого продолжения решения $y(t)$. Значит, решение $y(t)$ продолжается на всю вещественную ось $\mathbb{R}$.

Заметим, что у многочлена f есть как положительные, так и отрицательные корни (в точке $x = 0$ значение f положительно, а при достаточно больших абсолютных значениях x — отрицательно). Выберем такие корни ξ_1, ξ_2 , что $\xi_1 < 0 < \xi_2$ и f не имеет корней на интервале (ξ_1, ξ_2) (то есть f принимает положительные значения на интервале (ξ_1, ξ_2)). Отметим, что $f'(\xi_1), f'(\xi_2) \neq 0$ (в самом деле, многочлен $f'(x) = -2x^5 + 10x$ имеет только два ненулевых корня $\pm\sqrt[4]{5}$, которые, как нетрудно видеть, не являются корнями самого f).

Так как $y'(0) = 1 > 0$, то для достаточно близких к нулю значений t решение y удовлетворяет равенству

$$t = \int_0^{y(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \quad (4)$$

Кроме того, интеграл

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} < \infty,$$

так как $f'(\xi_1), f'(\xi_2) \neq 0$. Значит, равенство (4) задаёт решение (3), удовлетворяющее начальным данным из условия, на некотором отрезке $[t_1, t_2]$. Обозначим $T = t_2 - t_1$, тогда можно продолжить решение y на интервал $[t_2, t_2 + T]$ из соображений симметрии: $y(t_2 + \tau) = y(t_2 - \tau)$ для $0 \leq \tau \leq T$ (то есть $y'(t) = -\sqrt{f(y(t))}$ для любого $t \in [t_2, t_2 + T]$). Поскольку теперь $y(t_2 - T) = y(t_2 + T)$ и $y'(t_2 - T) = 0 = y'(t_2 + T)$, то решение y можно продолжить до периодического на всю вещественную ось. $\square$

Задача 4. *Покажите, что абелева группа порядка 2025 не может действовать точно на множестве из 13 элементов. Действие называется точным, если каждый элемент отличный от единицы действует нетривиально.*

Решение. Действие группы G на множестве X из 13 элементов — это гомоморфизм φ из G в группу перестановок S_{13} . Точность действия означает, что любой нетривиальный элемент группы G переводится в нетривиальную перестановку из S_{13} . Иными словами, точность действия равносильна тому, что гомоморфизм φ имеет тривиальное ядро $\ker \varphi = \{e\}$, т. е. является инъекцией. Поэтому задача равносильна следующей: доказать, что в S_{13} нет абелевой подгруппы порядка 2025.

Предположим противное: пусть G — абелева подгруппа S_{13} порядка $2025 = 5^2 \cdot 3^4$.

Любой элемент $\sigma \in S_{13}$ представляет собой произведение непересекающихся циклов вида $(i_1 i_2 \dots i_k)$. Порядок σ — это НОК длин его циклов. Порядок элемента делит порядок группы, поэтому любой элемент G имеет порядок $5^p \cdot 3^q$, где $p \leq 2, q \leq 4$.

Заметим, что в G не может содержаться элементов порядка 5^p с $p > 1$: иначе такой элемент должен был бы содержать цикл длины $5^p \geq 5^2 > 13$. Аналогично, в G нет элементов порядка 3^q с $q > 2$.

Две перестановки $\sigma, \tau \in S_{13}$ коммутируют, когда $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$.

В общем случае, сопряжение $\sigma \rightarrow \tau\sigma\tau^{-1}$ элементом τ переводит каждый цикл $(i_1 i_2 \dots i_k)$ перестановки σ в цикл той же длины $(\tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_k})$. Поэтому если перестановки σ, τ коммутируют, то τ переводит каждый цикл из σ в цикл из σ той же длины.

Заметим, что в группе S_{13} элемент σ порядка 5 коммутирует с элементом τ порядка 3^q , $q \in \{1, 2\}$, только тогда, когда никакой 3^q -цикл перестановки τ не пересекается ни с каким 5-циклом перестановки σ . Действительно, количество 5-циклов в σ равно 1 или 2. Перестановка τ порядка 3^q не может менять два 5-цикла местами, поэтому она должна переводить каждый 5-цикл в себя. Поскольку порядок τ не делится на 5, это возможно только когда τ оставляет на месте каждый элемент каждого 5-цикла в τ , т. е. когда циклы в σ и τ не пересекаются.

В частности, элементы порядков 5 и $3^2 = 9$ не могут коммутировать в S_{13} , поскольку $5 + 9 > 13$.

По теореме о классификации конечных абелевых групп, группа G раскладывается в прямую сумму

$$G = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{/(5^{p_i})} \oplus \bigoplus_j \mathbb{Z}_{/(3^{q_j})}, \quad (5)$$

где $\sum_i p_i = 2$, $\sum_j q_j = 4$.

Поскольку G не содержит элемента порядка 5^2 , левое слагаемое в (5) должно иметь вид $\mathbb{Z}_{/(5)} \oplus \mathbb{Z}_{/(5)}$. По доказанному выше, раз в G содержится элемент порядка 5, G не может содержать элемент порядка $3^2 = 9$. Значит, правое слагаемое в (5) имеет вид суммы четырёх подгрупп $\mathbb{Z}_{/(3)}$. Итого,

$$G = \mathbb{Z}_{/(5)} \oplus \mathbb{Z}_{/(5)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)}. \quad (6)$$

Пусть σ, τ — порождающие элементы двух подгрупп $\mathbb{Z}_{/(5)}$ в разложении (6). Тогда хотя бы один из трёх элементов $\sigma, \tau, \sigma\tau$ состоит из двух 5-циклов. Действительно, если σ или τ состоят из двух 5-циклов, доказывать нечего. Если оба элемента σ, τ состоят из одного 5-цикла, то эти 5-циклы не пересекаются, поскольку σ и τ коммутируют и не являются степенями друг друга. Значит, $\sigma\tau$ является произведением двух циклов.

Наконец, существует $3^4 = 81$ элемент порядка 3 из подгруппы $\mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)} \oplus \mathbb{Z}_{/(3)}$, который должен коммутировать с этим элементом, состоящим из двух 5-циклов. Но, по доказанному выше, любой из этих 81 элементов должен оставлять на месте каждый элемент двух 5-циклов. Тогда этот 81 элемент должен переставлять не более $13 - 5 \cdot 2 = 3$ элементов, но $3! = 6 < 81$. Противоречие. $\square$

Задача 5. Существует ли непрерывная непостоянная функция определённая на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, такая, что для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$f(ax + by, cx + dy) = f(x, y)$$

для любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Решение. Такой функции не существует. Предположим обратное, пусть f удовлетворяет условию задачи. Тогда для любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ имеет место равенство

$$f(x, y) = f(x + y, y)$$

(достаточно в условии задачи положить $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$). Значит, для любого натурального n выполнено

$$\dots = f\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = f\left(0, \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dots,$$

то есть

$$f\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{m'}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ для любых } m, m' \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Покажем теперь, что $f(x, 0) = f(x', 0)$ для всех $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В самом деле, можно выбрать последовательности целых чисел $\{m_n\}, \{m'_n\}$, для которых выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m'_n}{n} = x'.$$

Пользуясь непрерывностью f и (7), получаем

$$f(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{m_n}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{m'_n}{n}, \frac{1}{n}\right) = f(x', 0).$$

Обозначим $A = f(1, 0)$, тогда $f(x, 0) = A$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Далее, покажем, что $f(p, q) = A$ для любого $(p, q) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$. В самом деле, существует $k' \in \mathbb{N}$, для которого $k'p, k'q \in \mathbb{Z}$. Определяя $k = \frac{k'}{\text{НОД}(k'p, k'q)}$, получаем, что $kx, ky \in \mathbb{Z}$ и $\text{НОД}(kx, ky) = 1$. По лемме о линейном представлении НОД существуют $b, d \in \mathbb{Z}$, для которых $kp \cdot b - kq \cdot d = 1$. По условию задачи для $a = kp, c = kq, x = 1/k, y = 0$ имеем

$$A = f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = f\left(kp \cdot \frac{1}{k} + b \cdot 0, kq \cdot \frac{1}{k} + d \cdot 0\right) = f(p, q).$$

Значит, функция f принимает значение A во всех рациональных точках, но поскольку рациональные точки всюду плотны, а f непрерывна, то функция f постоянна. Таким образом, мы пришли к противоречию. $\square$

Задача 6. Пусть f — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Докажите, что существует z такое, что $|f(z)| \leq 1$ и $|f'(z)| \geq n$.

Решение. Рассмотрим область $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |f(z)| \geq 1\}$, где $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. При этом $\partial D = \{z : |f(z)| = 1\}$, где ∂D — граница области D . Определим функцию $g(z)$ так

$$g(z) = \frac{f'(z)^n}{f(z)^{n-1}}.$$

Заметим, что функция $g(z)$ голоморфна в области D , и $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = n^n$. Так как g голоморфна в D , можем применить принцип максимума. Получим, что существует точка $z_0 \in \partial D$ такая, что $|g(z_0)| \geq n^n$, при этом $|f(z_0) = 1|$. Значит, $|f'(z_0)|^n \geq n^n$, то есть $|f'(z_0)| \geq n$. $\square$

Задача 8. Заряд q неподвижно закреплен в пространстве R^3 , второй заряд противоположного знака $-q$ и массы m может двигаться без трения по прямой, расположенной на расстоянии ℓ от закрепленного заряда. Подвижный заряд совершает малые колебания вокруг положения равновесия, причем скорость его движения много меньше скорости света c . Иные силы, кроме электростатической силы Кулона, в системе отсутствуют.

- а) Сформулируйте модельные ограничения “малые колебания” и “много меньше скорости света” в виде соотношений на параметры задачи и определите период малых колебаний подвижного заряда, пренебрегая потерями на электромагнитное излучение.
- б) Определите в дипольном приближении относительную потерю энергии $\Delta E/E$ системы зарядов за один период колебаний, считая эту величину много меньшей 1. Здесь E — полная энергия системы, ΔE — энергия, унесенная дипольным излучением за один период.

Решение. а) Рассмотрим плоскость R^2 , проходящую через прямую A , по которой движется заряд $-q$, и точку, в которой закреплен заряд q . В этой плоскости зафиксируем декартову прямоугольную систему координат с координатными осями, совпадающими с прямой A и перпендикуляром к ней, проходящим через неподвижный заряд q . Радиус-векторы $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$ зарядов q и $-q$ в выбранной плоскости имеют вид:

$$\vec{r}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \end{pmatrix} \quad \vec{r}_- = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия зарядов имеет вид:

$$U = -\kappa \frac{q^2}{|\vec{r}_+ - \vec{r}_-|} = -\kappa \frac{q^2}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}.$$

Коэффициент κ зависит от системы единиц, мы будем пользоваться системой СГС, в которой $\kappa = 1$.

Уравнение движения заряда $-q$ имеет вид:

$$m \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -q^2 \frac{x}{(\ell^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Здесь $\ddot{x}$ означает вторую производную по времени от функции $x(t)$. Это же уравнение движения можно получить проектируя вектор силы Кулона на ось $O\vec{x}$.

Рассмотрим движение заряда в малой окрестности точки равновесия $x = 0$. Разложим выражение для силы в правой части (8) в ряд по малому параметру $\varepsilon = x/\ell$ и сохраним только главный порядок разложения:

$$m \ddot{x} = -\frac{q^2}{\ell^3} x \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{\ell^2} + \dots \right) = -\frac{q^2}{\ell^3} x + o(\varepsilon)$$

В результате получаем уравнение гармонических колебаний с угловой частотой ω

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{q^2}{m\ell^3}.$$

Период таких колебаний $T = 2\pi/\omega$.

Таким образом, движение заряда $-q$ в малой окрестности точки равновесия приближенно представляет собой гармонические колебания с амплитудой X_0 и периодом T

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^3}{q^2}} \quad (9)$$

при условии $X_0/\ell \ll 1$.

Максимальное по модулю значение скорости движения $v = \dot{x}(t)$ равно ωX_0 , поэтому требование нерелятивистского движения заряда $v^2 \ll c^2$ приводит к такому ограничению на параметры задачи:

$$\left(\frac{X_0}{\ell} \right)^2 \frac{q^2/\ell}{mc^2} \ll 1.$$

б) Мгновенная мощность потерь на электромагнитное излучение в дипольном приближении имеет вид:

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{D}}|^2}{c^3},$$

где $\vec{D}(t) = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_-$ — вектор дипольного момента системы зарядов q и $-q$.

Подставляя гармоническое решение (9) и учитывая постоянство r_+ , получаем для мощности потерь на излучение следующее выражение:

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4 X_0^2}{c^3} \cos^2(\omega t + \phi_0).$$

Потери энергии за период:

$$\Delta E = - \int_0^T P(t) dt = - \frac{2\pi}{3} \frac{q^2 \omega^3 X_0^2}{c^3}$$

Полная энергия заряда $-q$, движущегося по закону (9), равна потенциальной энергии в крайних точках $x = \pm X_0$:

$$E = - \frac{q^2}{\sqrt{\ell^2 + X_0^2}} = - \frac{q^2}{\ell} + o(X_0/\ell).$$

Искомое отношение потерь на излучение за один период к полной энергии движущегося заряда равно

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{X_0}{\ell} \right)^2 \left(\frac{q^2/\ell}{mc^2} \right)^{3/2} \ll 1.$$

□