

Профиль: «Теория игр»**КОД - 290***Памяти Андрея Бремзена***Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.**

Решите все задачи. Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции.

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк — распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Удачи!**Задача 1. Камень-ножницы-бумага. Одна рука (15 баллов)**

В первой серии второго сезона известного сериала герои вынужденно играют в игру, которую в русском переводе назвали «Камень-ножницы-бумага. Одна рука». Правила этой игры заключаются в следующем. Игроки одновременно, используя две руки, выбирают два символа и показывают друг другу. Затем одновременно убирают одну руку за спину. В итоге победитель определяется стандартными правилами игры «Камень-ножницы-бумага». Камень побеждает ножницы, которые, в свою очередь, побеждают бумагу, а бумага побеждает камень. Если оба игрока показывают одинаковые символы, то игра заканчивается ничьей. Считайте, что выигрыш игроки оценивают в 1, проигрыш в (-1), а ничью — в 0. Найдите равновесие Нэша совершенное по подыграм в данной игре.

Rock-paper-scissors. One hand (15 points)

In one famous series (s2:e1), the heroes are forced to play a game that was called "Rock-Paper-Scissors. One Hand" in the Russian translation. The rules of this game are as follows. Players simultaneously, using both hands, choose two symbols and show them to each other. Then they simultaneously put one hand behind their backs. As a result, the winner is determined by the standard rules of the game "Rock-Paper-Scissors". Rock beats scissors, which in turn beats paper, and paper beats rock. If both players show the same symbols, the game ends in a draw. Consider that the players value a win at 1, a loss at (-1), and a draw at 0. Find the subgame perfect Nash equilibrium in this game.

Решение.

Проанализируем ситуации, в зависимости от действий игроков на первом этапе. На втором этапе игры могут возникнуть следующие симметричные ситуации (в ячейках результат с точки зрения 1го игрока, для второго симметрично).

1\2	КК	ББ	НН	КН	КБ	НБ
КК	Ничья	Проигрыш	Выигрыш	Ничья	Проигрыш	Проигрыш
ББ	Выигрыш	Ничья	Проигрыш	Проигрыш	Ничья	Проигрыш
НН	Проигрыш	Выигрыш	Ничья	Проигрыш	Проигрыш	Ничья
КН	Ничья (убрать Н)	Выигрыш (убрать К)	Выигрыш (убрать Н)	(1)		
КБ	Выигрыш (убрать К)	Ничья (убрать К)	Выигрыш (убрать Б)	(2)	(3)	
НБ	Выигрыш (убрать Н)	Выигрыш (убрать Б)	Ничья (убрать Б)	(4)	(5)	(6)

1. (1)-(3)-(6)

	КН — убрать К	КН — убрать Н
КН — убрать К	Ничья; Ничья	Проигрыш; Выигрыш
КН — убрать Н	Выигрыш; Проигрыш	Ничья; Ничья

NE $(1/2; 1/2)$ — равновесный выигрыш 0.

2. Рассмотрим отдельно случай (2)

	КН — убрать К	КН — убрать Н
КБ — убрать К	Проигрыш; Выигрыш	Выигрыш; Проигрыш
КБ — убрать Б	Выигрыш; Проигрыш	Ничья; Ничья

Получим матрицу

	КН — убрать К	КН — убрать Н
КБ — убрать К	-1; 1	1; -1
КБ — убрать Б	1; -1	0; 0

Заметим, что в данной игре нет равновесия в чистых стратегиях, но существует равновесие в смешанных стратегиях. Найдем его, воспользуясь тем, что игрок будет выбрать смешанную стратегию при условии, когда его ожидаемые выигрыши от чистых стратегий равны. Пусть первый игрок выбирает (КБ — убрать К) с вероятностью p , а второй игрок выбирает (КН — убрать К) с вероятностью q .

Тогда для первого игрока

$$\mathbb{E}U_1(\text{КБ — убрать К}) = -1q + 1(1 - q) = 1q + 0(1 - q) = \mathbb{E}U_1(\text{КБ — убрать Б})$$

Откуда $q = \frac{1}{3}$. Для второго игрока

$$\mathbb{E}U_2(\text{КН — убрать К}) = 1p - 1(1 - p) = -1p + 0(1 - q) = \mathbb{E}U_2(\text{КН — убрать Н})$$

Откуда $p = \frac{1}{3}$. Тогда ожидаемый выигрыш в этом случае $\mathbb{E}U_1 = \frac{1}{3}$ и $\mathbb{E}U_2 = -\frac{1}{3}$.

3. Аналогично для (4) и (5).

Получим

1\2	КК	ББ	НН	КН	КБ	НБ
КК	0;0	-1;1	1;-1	0;0	-1;1	-1;1
ББ	1;-1	0;0	-1;1	-1;1	0;0	-1;1
НН	-1;1	1;-1	0;0	-1;1	-1;1	0;0
КН	0;0	1;-1	1;-1	0;0	-1/3;1/3	1/3;-1/3
КБ	1;-1	0;0	1;-1	1/3;-1/3	0;0	-1/3;1/3
НБ	1;-1	1;-1	0;0	-1/3;1/3	1/3;-1/3	0;0

Заметим, что равновесия в чистых стратегиях в этой игре нет. Кроме того, стратегии (КК), (ББ), (НН) являются слабо доминируемыми. Удаление слабо доминируемых стратегий не приведет к появлению нового равновесия. Тогда останется правая нижняя матрица, которая с точки зрения выигрышей и исходов практически аналогична обычной игре Камень-ножницы-бумага с равновесием в смешанных стратегиях, где каждая стратегия играетс равновероятно.

Докажем, что игроки не будут играть старетегии с одинаковыми символами в равновесии. Рассмотрим стратегии НН и КН, стратегия КН лучше при любых действиях второго игрока, кроме ББ. Когда второй игрок играетс ББ с вероятностью 1 (и только в этом случае), первому игроку все равно играть НН или КБ, то есть он может играть стратегию НН с ненулевой вероятностью. Но в таком случае второй игрок получает выигрыш (-1) и хочет отклониться, получается, такая ситуация не будет равновесием. В любых других случаях, когда второй игрок выбирает ББ с вероятностью строго меньше 1, то первому игроку при прочих равных лучше перераспределять вероятность со стратегии НН на КБ.

Ответ $(1/3 \text{ КН} + 1/3 \text{ КБ} + 1/3 \text{ НБ}; 1/3 \text{ КН} + 1/3 \text{ КБ} + 1/3 \text{ НБ})$

Критерии.

- формализация игры — 1 балл
- рассмотрение каждого из 3 блоков таблицы (верхний левый, верхний правый, нижний левый) в явном или неявном виде — по 2 балла
- рассмотрение правого нижнего блока таблицы для симметричных случаев — 2 балла
рассмотрение правого нижнего блока таблицы для симметричных случаев — 3 балла
- анализ итоговой матрицы, поиск чистых стратегий, указание на существование равновесия в смешанных — 2 балла
- ответ — 1 балл

Если участник приводит решение классической игры Камень-ножницы-бумага, то за решение сотавится 0 баллов.

Задача 2. Победитель получает всё (12 баллов)

В пространственной модели политической конкуренции избиратели равномерно распределены на отрезке $[0,1]$ и голосуют за ближайшего кандидата. При нескольких равноудаленных кандидатах избиратели выбирают между ними равновероятно. Победа кандидата определяется простым большинством голосов, при равенстве голосов у нескольких кандидатов, победитель выбирается равновероятно. Покажите, что если кандидаты заинтересованы только в победе (а не в доле голосов), то в игре, в которой кандидаты одновременно и независимо выбирают свою позицию на отрезке, при любом количестве кандидатов существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

The winner takes it all (12 points)

In a spatial model of political competition, voters are uniformly distributed on the interval $[0,1]$ and vote for the closest candidate. When there are several equally distant candidates, voters choose between them with equal probability. The winning of a candidate is determined by a simple majority of votes; if several candidates have the equal number of votes, the winner is chosen randomly with equal probability. Show that if candidates are interested only in the winning (and not in the share of votes), then in a game in which candidates simultaneously and independently choose their position on the interval, there is a Nash equilibrium in pure strategies for any number of candidates.

Решение.

Пример равновесия: первый кандидат в точке $1.5/(n+2)$, остальные в точках $3/(n+2), \dots, (n+1)/(n+2)$. Первый кандидат выигрывает и никто изменением положения не может забрать у него победу.

Примеров можно построить много, две основные идеи:

1. Один кандидат, являющийся самым левым или правым из всех, получает в полтора раза больше остальных (или чуть больше), $n-1$ кандидатов равноудалены друг от друга и получают равные доли голосов. Легко увидеть, что отклонение в точку победителя, движение ближайшего к победителю в сторону победителя и движения кандидата с противоположного края не приводят к победе.

2. Для четного количества кандидатов можно найти $n/2$ точек, таким образом, что они равноудалены друг от друга, половина этого расстояния от края до ближайшего к краю кандидата, и каждый кандидат получает равные доли. Любое отклонение не приводит к увеличению вероятности победы. Для нечетного количества ($n > 4$) можно так разместить одного кандидата в медианной позиции и всех остальных парами в равноудаленных позициях, что все будут иметь равные доли. Для $n=3$ можно построить пример с кандидатами в точках $1/3, 2/3, 2/3$.

Критерии.

1 балл за рассмотрение случая с двумя игроками. В этом случае работает теорема о медианном избирателе.

До 5 баллов за рассмотрение частных случаев с $n=3, n=4$.

Многие универсальные примеры оказывались неверными для $n=3, n=4$ или для четных/нечетных n . Работы штрафовались индивидуально в зависимости от аргументированности решения. Примеры без доказательства, где контрпример строился элементарно, получали меньше баллов, чем примеры с неточностями в доказательствах.

Задача 3. Пари Гроссмейстера (20 баллов)

Историческая вставка: Николай Васильевич Абацев, гроссмейстер и чемпион СССР по шашкам, любил предлагать пари мастерам спорта: спорил что из 10 партий ровно 5 выиграет и ровно 5 проиграет. Начинал играть в шашки, если понимал, что выиграши в партии не светит, переключался на поддавки. (Источник: <https://fshmo.ru/legende-shashek-nikolayu-vasilevichu-abacievu-80-let/>)

Про Древнюю Игру известно, что в неё играют двое и что существовало две версии игры: прямая и обратная. Правила были абсолютно одинаковы, за исключением того, что в прямой версией игры побеждает тот, кто первый уничтожит фишки соперника, а в обратной побеждает тот, кто первый избавится от своих фишек. В обеих версией Древней Игры обязательно побеждает кто-то из двух игроков, ничья невозможна, в отличие от шахмат и шашек.

Гроссмейстер отлично играет как в прямую, так и в обратную версию Древней Игры. Однажды он предложил Мастеру пари. Гроссмейстер и Мастер сыграют шесть партий в прямую Древнюю Игру. Гроссмейстер говорит, что выиграет ровно в трех партиях. Если так и происходит, то Мастер дает ему приз, во всех остальных случаях приз такой же ценности Гроссмейстер

отдает Мастеру. Это значит, что если Гроссмейстер уже выиграл три партии, то Мастер будет специально стремиться к поражению в следующих партиях.

Перед каждой партией игроки анализируют текущий счет в матче и решают, какую стратегию выбрать: уничтожать фишки соперника или избавляться от своих. Если один из игроков решает уничтожать фишки соперника, а другой избавляться от своих, то оба достигают своих целей. Если же игроки выбрали на партию одинаковый план, то Гроссмейстер достигает своей цели в партии с вероятностью $p > 0,5$ (ведь он одинаково отлично играет как в прямую, так и в обратную версию Древней Игры).

Найдите вероятность того, что Гроссмейстер выполнит пари.

Grandmaster's Bet (20 points)

Historical insert: Nikolai Vasilyevich Abatsiev, grandmaster and champion of the USSR in checkers, liked to offer bets to masters of sports: he bet that out of 10 games he would win exactly 5 and lose exactly 5. He started playing checkers, if he realized that there was no chance of winning the game, he switched to giveaways.

It is known about the Ancient Game that it is played by two people and that there were two versions of the game: direct and reverse. The rules were absolutely the same, except that in the direct version of the game the winner is the one who first destroys the opponent's pieces, and in the reverse version the winner is the one who first gets rid of his own pieces. In both versions of the Ancient Game, one of the two players must win, a draw is impossible, unlike chess and checkers.

The Grandmaster plays both the direct and reverse versions of the Ancient Game very well. One day, he proposed a bet to the Master. The Grandmaster and the Master will play six games of the direct Ancient Game. The Grandmaster says that he will win in exactly three games. If this happens, the Master gives him a prize, in all other cases the Grandmaster gives a prize of the same value to the Master. This means that if the Grandmaster has already won three games, the Master will specifically strive to lose in the next games.

Before each game, the players analyze the current score in the match and decide which strategy to choose: destroy the opponent's pieces or get rid of their own. If one of the players decides to destroy the opponent's pieces, and the other to get rid of his own, then both achieve their goals. If the players have chosen the same plan for the game, then the Grandmaster achieves his goal in the game with a probability of $p > 0.5$ (since he plays both the direct and the reverse version of the Ancient Game equally well).

Find the probability that the Grandmaster will fulfill the bet.

Решение.

Приведем два способа решения задачи.

Способ 1. Рекуррентное соотношение

Пусть $f(N, K)$ — вероятность выполнить пари, если осталось N партий, а разница между числом побед и поражений Гроссмейстера равна K . Нам надо найти $f(6, 0)$.

База. Пусть $N = 0$, партий больше не осталось, тогда Гроссмейстер выполнил пари, если разница побед и поражений равна 0, и не выполнил иначе. Это значит, что $f(0, 0) = 1$ и $f(0, K) = 0$ при $K \neq 0$.

Шаг. Пусть сейчас осталось N партий и текущая разность побед и поражений Гроссмейстера равна K . Тогда в случае победы Гроссмейстера в ближайшей партии останется $N - 1$ партий и разность побед-поражений станет $K + 1$; в случае поражения Гроссмейстера в ближайшей партии останется $N - 1$ партий и разность побед-поражений станет $K - 1$. Тогда если $f(N - 1, K + 1) > f(N - 1, K - 1)$, то Гроссмейстер будет стремиться к своей победе в партии, а Мастер к поражению Гроссмейстера, Гроссмейстер добьется цели с вероятностью p . Если $f(N - 1, K + 1) < f(N - 1, K - 1)$, то Гроссмейстер будет стремиться к своему поражению в партии, а Мастер к победе Гроссмейстера в партии, Гроссмейстер добьется цели с вероятностью p .

Наконец, если $f(N-1, K+1) = f(N-1, K-1)$, то игроки могут использовать любые стратегии, в любом случае $f(N, K) = f(N-1, K+1) = f(N-1, K-1)$.

Отсюда получаем, что $f(N, K)$ однозначно выражается через $f(N-1, K+1)$ и $f(N-1, K-1)$.

$$f(N, K) = p \max [f(N-1, K+1), f(N-1, K-1)] \\ + (1-p) \min [f(N-1, K+1), f(N-1, K-1)]$$

Это позволяет нам восстановить значение $f(N, K)$ при любых N, K .

Нам нужно найти $f(6, 0)$. Для этого мы можем последовательно находить значения f для $N = 1, 2, \dots, 5$, после чего посчитать $f(6, 0)$.

$f(1, 1) = pf(0, 0) + (1-p)f(0, 2) = p$, $f(1, -1) = pf(0, 0) + (1-p)f(0, -2) = p$, иначе $f(1, K) = 0$.

$f(2, 0) = pf(1, 1) + (1-p)f(1, -1) = p^2 + (1-p)p = p$, $f(2, -2) = f(2, 2) = pf(1, 1) + (1-p)f(1, 3) = p^2 + 0 = p^2$, иначе $f(2, K) = 0$.

...

$f(6, 0) = f(5, -1) = f(5, 1) = p^3(2p^2 - 6p + 5)$.

Представим расчеты в виде таблицы. Если в таблице стоит прочерк, то значение не нужно для расчета $f(6, 0)$.

Значения $f(N, K)$							
N	K=-3	K=-2	K=-1	K=0	K=1	K=2	K=3
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	p	0	p	0	0
2	0	p^2	0	p	0	p^2	0
3	p^3	0	$p^2(2-p)$	0	$p^2(2-p)$	0	p^3
4	-	$p^3(3-2p)$	0	$p^2(2-p)$	0	$p^3(3-2p)$	-
5	-	-	$p^3(2p^2-6p+5)$	0	$p^3(2p^2-6p+5)$	-	-
6	-	-	-	$p^3(2p^2-6p+5)$	-	-	-

Способ 2. Комбинаторика

Назовем *счетом* модуль разности между числом побед и поражений Гроссмейстера, *путем* - последовательность из семи чисел, показывающая, как счет менялся от нулевой партии (то есть всегда 0, ни одной партии не сыграно) до шестой. Из определения счета следует, что *путем* является последовательность из семи целых неотрицательных чисел, где первое число 0, а соседние числа отличаются друг от друга на 1. Назовем путь *победным*, если последнее число пути равно 0 — это соответствует тому, что после шести партий число побед равно числу поражений и пари выполнено.

Найдем все возможные победные пути.

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0$$

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0$$

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0$$

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0$$

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0$$

Количество победных путей оказалось равно 5. В общем случае, при игре из $2n$ партий, количество победных путей равно $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — **число Каталана**.

Осталось вычислить вероятность того, что путь окажется победным. Если на i -ой позиции записано число 0, то следующее обязательно будет единицей. Если на i -ой позиции положительное число, то несложно доказать, что Гроссмейстеру оптимально его приблизить к 0 (то есть уменьшить на 1), а Мастеру, соответственно, наоборот, увеличить на 1. Гроссмейстер достигает успеха с вероятностью p (зеленые подписи к стрелкам в путях), а Мастер — с вероятностью $1 - p$ (красные подписи к стрелкам в путях).

Назовем партию *важной*, если текущий счет не равен нулю. Во всех пяти победных путях Гроссмейстер трижды добивается успеха в важных партиях. Мастер в одном из путей ни разу не добивается успеха в важных партиях, в двух — по разу, еще в двух — два раза.

Итого вероятность того, что путь будет победным, равна:

$$p^3(1 + 2(1 - p) + 2(1 - p)^2) = p^3(2p^2 - 6p + 5)$$

Ответ: $p^3(2p^2 - 6p + 5)$.

Критерии.

0 баллов – неверный ответ, нелогичное направление доказательства

5 баллов – логичное направление доказательства, но ответа нет

10 баллов – логичное направление доказательства, есть ответ, но он неверен

20 баллов – верный ответ, логичное доказательство

Задача 4. Стабильные соседки (13 баллов)

Подруги Алиса, Белла, Вера и Галя заселяются в общежитие. В общежитии есть комнаты, в каждой из которых могут разместиться по две девушки.

У девушек есть строгие предпочтения в отношении соседок по комнате: это значит, что каждая из девушек может отранжировать подруг от более приятных соседок к менее приятным, причем никакие из соседок не будут одинаковыми по предпочтительности. Для каждой из девушек жить с подругой лучше, чем с незнакомой девушкой или одной. В общежитии достаточно много комнат, поэтому подруги могут меняться соседками, не дожидаясь согласия своей текущей соседки, и заселиться в новую пустую комнату.

Назовем разбиение девушек на пары соседок *стабильным*, если никакие из девушек не заблокируют разбиение, т.е. не захотят передоговориться и отселиться. Например, пусть для Алисы Вера более приятная соседка, чем Белла, а для Веры Алиса более приятная соседка, чем Галя. Тогда разбиение на пары соседок Алиса — Белла и Вера — Галя не будет стабильным: Алисе и Вере выгодно отказаться от текущих соседок в пользу друг друга, поэтому они объединятся в пару Алиса — Вера и изначальное разбиение распадется. Пусть N — количество способов разбить четырех подруг на стабильные пары соседок. Найдите все возможные значения N при всевозможных предпочтениях подруг и докажите, что других нет.

Stable neighbors (13 points)

Friends Alice, Bella, Vera and Galya move into a dorm. The dorm has rooms, each of which can accommodate two girls.

The girls have strict roommate preferences: this means that each girl can rank her friends from more pleasant roommates to less pleasant roommates, and no roommates will be equally preferable. For each girl, living with a friend is better than with a stranger or alone. There are enough rooms in the dorm, so the friends can change roommates without waiting for the consent of their current roommate.

We call the division of girls into pairs of roommates *stable* if none of the girls block the division, i.e. they will not renegotiate and move out. For example, let Vera be a more pleasant roommate for

Alice than Bella, and let Alice be a more pleasant roommate for Vera than Galya. Then the partition into pairs of neighbors Alice — Bella and Vera — Galya will not be stable: it is advantageous for Alice and Vera to give up their current neighbors in favor of each other, so they will unite into a pair Alice — Vera and the initial partition will fall apart. Let N be the number of ways to split four friends into stable pairs of neighbors. Find all possible values of N for all possible preferences of the friends and prove that there are no others.

Решение.

Будем обозначать разбиение девушек на пары (AB, CD) , что значит, что девушка A в паре с B , а девушка C в паре с D .

Если для девушки A соседка B является более предпочтительной, чем C , то будем обозначать это $A : B \succeq C$.

Теперь обратимся непосредственно к решению задачи. Четырех девушек может разбить на пары тремя способами, поэтому число стабильных пар может принимать значения от 0 до 3. Рассмотрим все возможные N : построим пример предпочтений, при котором число стабильных пар в точности равно N , либо докажем, что их нет.

$N = 0$

$$A : B \succeq V \succeq \Gamma$$

$$B : V \succeq A \succeq \Gamma$$

$$V : A \succeq B \succeq \Gamma$$

$$\Gamma : A \succeq B \succeq V$$

В разбиении $(AB, V\Gamma)$ девушки B и V заблокируют разбиение: для B соседка V лучше A , а для V текущая соседка Γ наименее предпочтительная из всех. Аналогично, $(AB, B\Gamma)$ заблокируют A и B , а $(BV, A\Gamma)$ заблокируют V и A . Стабильных разбиений нет, пример построен.

$N = 1$

Пусть A и B наиболее предпочтительные друг для друга. Тогда разбиение $(AB, V\Gamma)$ будет стабильным, а любое другое будет заблокировано девушками A и B . Пример построен.

$N = 2$

$$A : B \succeq V \succeq \Gamma$$

$$B : \Gamma \succeq A \succeq V$$

$$V : A \succeq B \succeq \Gamma$$

$$\Gamma : V \succeq B \succeq A$$

Разбиение $(AB, V\Gamma)$ стабильно, ведь A и Γ с лучшими вариантами для себя и не будут уходить, при этом B и V тоже не заблокируют, ведь для B текущая соседка A более предпочтительна, чем V .

Аналогично разбиение $(AB, B\Gamma)$ стабильно, ведь B и V с лучшими вариантами для себя, при этом A и Γ тоже не заблокируют, так как для A текущая соседка лучше Γ .

При этом разбиение $(A\Gamma, BV)$ будет заблокировано, к примеру, девушками A и B . Итого два разбиения из трех стабильны, пример построен.

$N = 3$

Предположим, что существует такой набор предпочтений, что все разбиения стабильны. Пронумеруем девушек так, что $D_1 : D_2 \succeq D_3 \succeq D_4$ (1).

Разбиение (D_1D_4, D_2D_3) стабильно, значит девушки D_2 и D_3 не хотят уходить друг от друга к D_1 (иначе D_1 бы согласилась и разбиение не было бы стабильным): $D_2 : D_3 \succeq D_1$ (2) и $D_3 : D_2 \succeq D_1$ (3).

При этом (D_1D_3, D_2D_4) стабильно по предположению о том, что все разбиения на пары стабильны. Из условия (3) следует, что D_3 готова уйти к D_2 , а значит, чтобы D_2 и D_3 не заблокировали, должно выполняться условие $D_2 : D_4 \succeq D_3$ (4). Аналогично, (D_1D_2, D_3D_4) стабильно, и по условию (2) D_2 готова уйти от текущей соседки к D_3 , потому что $D_3 : D_4 \succeq D_2$ (5).

Остается заметить, что если $D_4 : D_2 \succeq D_3$, то из условия (4) следует, что разбиение (D_1D_2, D_3D_4) будет заблокировано D_2 и D_4 . А если $D_4 : D_3 \succeq D_2$, то из условия (5) следует, что разбиение (D_1D_3, D_2D_4) будет заблокировано D_3 и D_4 . Противоречие!

Ответ: N может принимать значения 0, 1, 2.

Критерии.

Выявлены теоретически возможные значения N — 1 балл.

Доказано, что N может быть 0 — 3 балла.

Доказано, что N может быть 1 — 3 балла.

Доказано, что N может быть 2 — 3 балла.

Доказано, что N не может быть 3 — 3 балла.

Задача 5. Меньше всех, но не совсем (15 баллов)

Трое играют в следующую игру. Каждый называет натуральное число (целое, не меньшее 1). Побеждает тот, кто называет минимальное число, встретившееся один раз. (Например, если названы числа 2, 2 и 3, побеждает третий). Если названы три одинаковых числа, победитель определяется равновероятно. Найдите какое-либо симметричное равновесие по Нэшу (числа называются одновременно).

The least, but not quite (15 points)

Three people play the following game. Each person names a natural number (an integer not less than 1). The winner is the one who names the smallest number that occurs once. (For example, if the numbers 2, 2, and 3 are named, the third person wins.) If three identical numbers are named, the winner is determined equiprobably. Find any symmetric Nash equilibrium (the numbers are called simultaneously).

Решение.

Легко видеть, что симметричных чистых равновесий нет. Пусть в смешанном равновесии вероятность того, что игрок называет число k , равна p_k .

Покажем, что стратегия p^* , определяемая $p_k^* = 1/2^k$, $k = 1, 2, \dots$ (сумма всех вероятностей равна 1, все корректно) является равновесной. Для этого достаточно показать, что если два других игрока играют p^* , то игроку безразлично, какое из натуральных чисел называть (тогда его наилучшим ответом будет любое распределение на натуральных числах, в том числе и p^*). Пусть полезность игрока при выигрыше равна 1, при проигрыше — 0. Ожидаемая полезность игрока, если он называет число n , равна

$$\mathbb{E}U(n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k^* \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k^{*2} + \frac{1}{3} p_n^{*2}.$$

Здесь первое слагаемое — это вероятность того, что каждый из двух других игроков выбрал число, большее n . Второе слагаемое — это вероятность того, что оба других игрока называли одно и то же число, меньшее n . Третье слагаемое — это вероятность того, что два других игрока тоже называли число n и при этом побеждает наш игрок.

Подставляя $p_k^* = 1/2^k$ и применяя формулы суммы бесконечной и конечной геометрической прогрессий, получаем

$$\mathbb{E}U(n) = \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-1}} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Итак, ожидаемая полезность не зависит от n . Следовательно, p^* является наилучшим ответом на (p^*, p^*) , а значит, (p^*, p^*, p^*) является равновесием. Доказывать единственность симметричного равновесия не требовалось.

Если же полезности при выигрыше и проигрыше равны не 1 и 0, а A и B , то ожидаемая полезность будет равна

$$\mathbb{E}U(n) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B,$$

что тоже не зависит от n , ответ остается таким же.

Критерии.

0 баллов за неверный ответ или неверные рассуждения

1 балл за найденные несимметричные равновесия Нэша с корректным обоснованием почему это равновесия

3 балла за корректное обоснование отсутствия равновесия Нэша в чистых стратегиях

5 баллов за дополнительное указание верного распределения вероятностей для равновесия в смешанных стратегиях

До 10 баллов за разбор некоторых частных случаев в зависимости от полноты и корректности доказательства такого частного случая и от близости этого частного к общему случаю

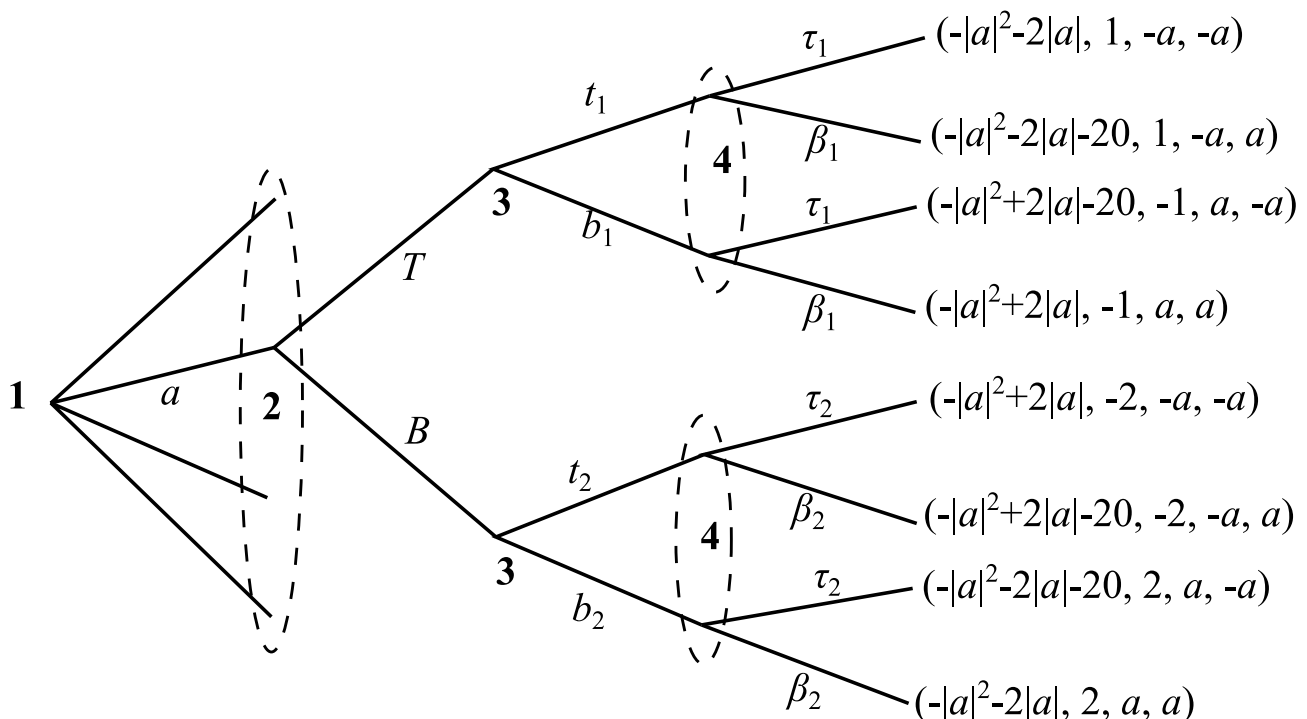
15 баллов за полное обоснованное решение со всеми необходимыми пояснениями

Меньшие баллы относительно вышеуказанной разбалловки ставились за верные частичные попытки решения в соответствующем направлении

Задача 6. В поисках равновесия (25 баллов)

Рассмотрите следующую игру 4х лиц. Игрок 1 выбирает число a из отрезка $[-1,1]$. На дереве игры изображен подграф после одного конкретного выбора игрока 1, все они аналогичны по своей структуре. Информационные множества игроков обозначены эллипсами.

Найдите равновесие, совершенное по подыграм, или покажите, что его не существует.



Searching for equilibrium (25 points)

Consider the following 4-person game (the tree is above). Player 1 chooses number a from the interval $[-1,1]$. The game tree shows the subgraph after one particular choice of player 1, all of which are similar in structure. The players' information sets are shown as ellipses.

Find a subgame perfect equilibrium, or show that it does not exist.

Решение.

Заметим, что игра эквивалентна двухэтапной игре: на первом этапе игроки 1 и 2 делают выбор *одновременно*, на втором этапе игроки 3 и 4 наблюдают предысторию и тоже делают одновременный выбор.

Выпишем матрицу подыгр для игроков 3 и 4, заметив, что при фиксированном a матрица одинаковая для любой стратегии игрока 2.

	τ	β
t	$-a, -a$	$-a, a$
b	$a, -a$	a, a

Тогда если $a > 0$, то $\sigma^3 = b$, $\sigma^4 = \beta$ по доминированию.

Если $a < 0$, то $\sigma^3 = t$, $\sigma^4 = \tau$ по доминированию.

Если $a = 0$, то игроки 3 и 4 безразличны и могут использовать любые смешанные стратегии.

Обозначим $\sigma^2 = (1 - \lambda)T + \lambda B$. Найдем, как выглядит функция выигрыша игрока 1 как функция от a и λ при $a \neq 0$.

Если $a > 0$, $\sigma^3 = b$, $\sigma^4 = \beta$, следовательно, $\sigma^2 = B$. Значит, $Eu_1(a) = -|a|^2 - 2a$ (достигает глобального максимума при -1 , далее убывает, соответственно максимум при положительном a стремится к 0 справа). Всегда есть стимул еще приблизить a к нулю, поэтому таких равновесий нет.

Если $a < 0$, $\sigma^3 = t$, $\sigma^4 = \tau$, следовательно, $\sigma^2 = T$. Значит, $Eu_1(a) = -|a|^2 + 2a$ (достигает глобального максимума при 1 , соответственно максимум при отрицательном a стремится к 0 слева). Всегда есть стимул еще приблизить a к нулю, поэтому таких равновесий нет.

Определим максимально возможный платеж игрока 1 при $a = 0$. Очевидно, что всевозможные выигрыши при любых чистых стратегиях остальных игроков сводятся либо к 0, либо к -20 . Это достигается при следующих сценариях: $Tt_1\tau_1$, $Tb_1\beta_1$, $Bt_2\tau_2$, $Tb_2\beta_2$.

Предположим, что $\lambda < 1/2$ (чаще играется T). Тогда очевидно, что игрок 1 получит максимальный выигрыш (строго положительный), сыграв $a = 1 - 2\lambda > 0$. Но тогда игроку 2 выгодно отклониться в $\sigma^2 = B$.

Предположим, что $\lambda > 1/2$ (чаще играется B). Тогда очевидно, что игрок 1 получит максимальный выигрыш (строго положительный), сыграв $a = 1 - 2\lambda < 0$. Но тогда игроку 2 выгодно отклониться в $\sigma^2 = T$.

Предположим, что $\lambda = 1/2$. Тогда игрок 1 может достигнуть максимума при $a = 0$. Но этот максимум возможен только при ответах игроков 3 и 4 из следующих комбинаций в верхней и нижней подыгре $t_1\tau_1$, $b_1\beta_1$, $t_2\tau_2$, $b_2\beta_2$. Но во всех этих случаях у игрока 2 есть предпочтения одной из стратегий T или B , он никогда не безразличен и поэтому отклонится.

Значит, ни в одном из случаев нет равновесия и игра не имеет равновесия, совершенного по подыграм.

Принципиальным условием для такого результата является бесконечность чистых стратегий у игрока 1.

Критерии.

К сожалению, никто до конца не смог корректно объяснить отсутствие равновесия при $a = 0$.

5 баллов ставилось – за подыгру 3 и 4 игрока.

8 баллов – дальше за выбор игрока 2 при ненулевом a

10-12 баллов – дальше за выбор игрока 1 при ненулевом a , находящий максимумы и устремляющий a к 0

до 17 баллов – за более менее успешные попытки анализировать случай $a = 0$ и рассмотреть возможные смешанные стратегии игрока 2.

Плюс-минус несколько баллов могут варьироваться вокруг указанных целевых в зависимости от четкости и логичности объяснения в конкретной работе.