

**Решения заданий заключительного этапа
по направлению «Физика»**

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	20	✓
2	20	✓
3	20	✓
4	20	✓
5	20	✓

Задача 1 Вокруг планеты массы M и радиуса R движется планета-спутник массы m по круговой орбите радиуса r . За счет приливных сил радиус орбиты спутника возрастает вдвое. На сколько при этом изменится угловая скорость вращения планеты? Считать, что вещество по объему планеты распределено равномерно.

Решение задачи 1:

Момент инерции планеты равен $I = (2/5)MR^2$, а ее момент импульса равен $I\omega = (2/5)MR^2\omega$, где ω - угловая скорость вращения планеты. Спутник движется по орбите со скоростью $v = \sqrt{\gamma M / r}$, то есть его момент импульса равен

$$mvr = m\sqrt{\gamma M r}$$

При увеличении радиуса r вдвое момент импульса спутника изменится на $(\sqrt{2}-1)m\sqrt{\gamma M r}$. В силу закона сохранения момента импульса на ту же величину (с обратным знаком) изменяется момент импульса планеты. Отсюда находим

$$\Delta\omega = -I^{-1}(\sqrt{2}-1)m\sqrt{\gamma M r} = -[(2/5)MR^2]^{-1}(\sqrt{2}-1)m\sqrt{\gamma M r}$$

Разбалловка:

Промежуточные результаты	Баллы
Верно записано выражение для момента инерции планеты	4
Правильно получено выражение для скорости спутника на орбите	4
Верно записано выражение для изменения момента импульса	6
Получено изменение угловой скорости	6



Задача 2. Сосуд содержит состоящий из одинаковых молекул массы m Больцмановский газ с плотностью массы ρ и имеющий температуру T . Найти силу, действующую на сосуд, за счет вытекания из него в вакуум газа через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) площади S .

Решение задачи 2:

Обозначим v скорость молекулы газа в направлении стенки. Нас интересуют только молекулы, движущиеся к стенке, то есть $v > 0$. Распределение вероятности этих молекул по скоростям дается Больцмановским фактором

$$N = \sqrt{\frac{2m}{\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right), \quad \int_0^{\infty} dv N = 1.$$

Число молекул со скоростями в интервале dv , которые подлетают к отверстию в единицу времени, равно $(\rho/m)SvNdv$. Каждая молекула уносит импульс mv , то есть сила (унос импульса в единицу времени) равна

$$\int_0^{\infty} dv S \rho v^2 N = S \rho \frac{2k_B T}{m}.$$

Разбалловка:

Промежуточные результаты	Баллы
Записано распределение молекул по скоростям	7
Найдено число молекул, движущихся к стенке в единицу времени	7
Найдена сила	6

Задача 3. Магнит малого размера массы m с магнитным дипольным моментом M парит над плоской горизонтально ориентированной поверхностью массивного сверхпроводящего тела. В некоторый момент тело теряет свойство сверхпроводимости. Найти время, за которое магнит упадет на тело.

Решение задачи 3:

Напряженность магнитного поля на поверхности сверхпроводника параллельна его поверхности. Поэтому поле сверхпроводника эквивалентно полю магнитного диполя, который расположен симметрично плоскости сверхпроводника относительно магнита и имеет ту же компоненту магнитного момента вдоль поверхности сверхпроводника и противоположную в перпендикулярном направлении. Поэтому энергия взаимодействия магнита со сверхпроводником записывается в виде



$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi (2r)^3} (M_{\parallel}^2 + 2M_{\perp}^2).$$

Здесь $M_{\parallel}$ - компонента магнитного момента вдоль поверхности сверхпроводника, $M_{\perp}$ - компонента магнитного момента, перпендикулярная поверхности сверхпроводника, а r - расстояние от магнита до поверхности сверхпроводника. Дополнительный множитель $1/2$ связан с тем, что производная $-dU/dr$ должна быть равна силе, действующей на магнит, которая определяется расстоянием $2r$ до магнитного диполя-отражения. Приведенная энергия достигает минимума при $M_{\perp} = 0$, то есть магнитный момент магнита в равновесии направлен параллельно поверхности сверхпроводника. При этом сила $F = -dU/dr$, действующая на магнит, равна

$$F = \frac{3\mu_0 M^2}{4\pi (2r)^4}.$$

Чтобы найти r , эту силу надо приравнять к весу магнита mg : $2r = \left(\frac{3\mu_0 M^2}{4\pi mg} \right)^{1/4}$.

После выключения сверхпроводимости магнит начинает свободно падать на тело, достигая его за время

$$t = \sqrt{2r/g} = \left(\frac{3\mu_0 M^2}{4\pi mg^5} \right)^{1/8}.$$

Разбалловка:

Промежуточные результаты	Баллы
Приведена энергия взаимодействия магнита со сверхпроводником	3
Записано условие достижения минимума энергии	3
Определена сила, действующая на магнит	3
Найдено расстояние от магнита до поверхности	4
Найдено время падения	4



Задача 4. Квантовая частица массы m находится в основном состоянии в одномерном потенциале $U = m\omega^2 x^2 / 2$. В некоторый момент времени потенциал мгновенно изменяется на $U = m\omega^2 (x - x_0)^2 / 2$. Найти вероятность того, что частица окажется в основном состоянии в новом потенциале.

Решение задачи 4:

Волновая функция основного состояния осциллятора имеет вид

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right).$$

Волновая функция основного состояния осциллятора со сдвинутым потенциалом имеет вид

$$\Psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (x - x_0)^2 \right).$$

Проекция Ψ_0 на новое основное состояние Ψ_1 равно

$$\int dx \Psi_1 \Psi_0 = \exp\left(-\frac{m\omega x_0^2}{4\hbar} \right).$$

Вероятность оказаться в новом основном состоянии равна квадрату этого выражения.

Разбалловка:

Промежуточные результаты	Баллы
Записано уравнение Шредингера для определения волновой функции основного состояния осциллятора	3
Получена волновая функция основного состояния осциллятора	5
Найдена проекция состояния Ψ_0 на состояние Ψ_1	7
Найден вероятность оказаться в основном состоянии Ψ_1	5



Задача 5. Электрон находится в поле распространяющейся в вакууме линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны частоты ω и с амплитудой электрического поля E_0 . Найти мощность излучения электрона.

Решение задачи 5:

Уравнение движения электрона в поле электромагнитной волны имеет вид

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t).$$

Мощность излучения ускоряющейся заряженной частицы равна

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{6\pi c^2} e^2 a^2.$$

Усредняя эту величину по периоду, находим

$$\overline{W} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{12\pi c^2} \frac{e^4 E_0^2}{m^2}.$$

Разбалловка:

Промежуточные результаты	Баллы
Записано уравнение движения электрона	7
Получена мощность излучения	7
Получена средняя мощность излучения	6