Инвариантная часть. Задача 3

Решение задачи № 3 (линейная алгебра)

Дана матрица:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & t-1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & t-2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & t-3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Найдем характеристическое уравнение: $(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) = 0$

Спектр матрицы оператора A_φ : $\{7^{[5]}\}$

Чтобы оценить размер Жордановых клеток следует рассмотреть подпространства вида:

$$Ker((A_\varphi - 7E)\hat{}n), n = 1,2,3,4,5$$

Где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вычисление матриц $(A_\varphi - 7E)\hat{}n$:

$$(A_\varphi - 7E) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & t-2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_\varphi - 7E)\hat{}2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (t-1)(t-2) & 2(t-1)+t-3 & 5(t-1)+4(t-4)+3 \\ 0 & 0 & 0 & (t-2)(t-3) & 3(t-2)+2(t-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (t-3)(t-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_\varphi - 7E)\hat{}3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (t-1)(t-2)(t-3) & 3(t-1)(t-2)+(t-4)(3t-5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (t-2)(t-3)(t-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_\varphi - 7E)\hat{}4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (t-1)(t-2)(t-3)(t-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_\varphi - 7E)\hat{}5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы Жорданова форма матрицы A_φ содержала клетку 4*4 подпространство $Ker((A_\varphi -\ 7E)^\wedge 4)$ должно быть корневым подпространством т.е. $rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 4) = 0$, а $rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3) = 1$

$rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 4) = 0$ при $t = 1{,}2{,}3{,}4$

Проверим что при $t = 1{,}2{,}3{,}4$ $rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3) \neq 0$

$$rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3)\big|_{t=1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3)\big|_{t=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3)\big|_{t=3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3)\big|_{t=4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Подтвердили, что при $t = 1{,}2{,}3{,}4$ $rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 4) = 0$, а $rank\ ((A_\varphi - 7E)^\wedge 3) \neq 0$

Ответ: Жорданова форма матрицы A_φ содержит клетку 4*4 при $t = 1{,}2{,}3{,}4$

Критерии оценки

14 баллов: обоснованное решение, правильный ответ.

9-13 баллов: задача решена частично: найдены не все значения параметра t, ответ недостаточно обоснован

1-8 баллов: описана попытка решения задачи, в которой есть частично корректные шаги,

приближающие к решению.

0 баллов: решение отсутствует вовсе либо присутствует набор цифр и слов, к решению никак не приближающий.

Вариативная часть

Решение задачи № 14 (численные методы)

В качестве функции активации можно использовать пороговую функцию (функцию Хевисайда)

$$\theta = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

Логическое **или** можно представить в виде формулы

$$x_1 || x_2 = \theta\left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\right),$$

что можно реализовать в виде модели нейронной сети

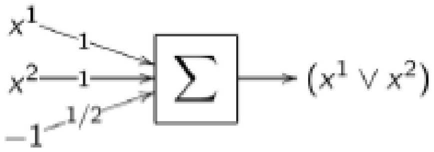


рис.1

Логическое **и** можно представить в виде формулы

$$x_1 \& x_2 = \theta\left(x_1 + x_2 - \frac{3}{2}\right),$$

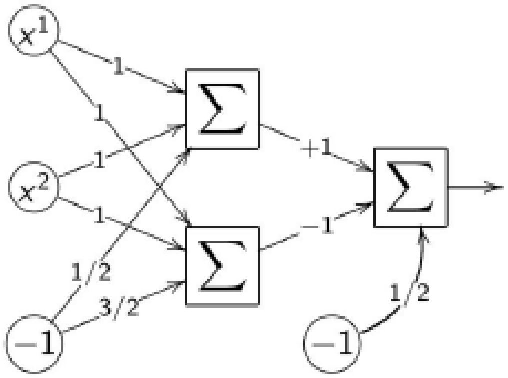
что можно представить в виде нейронной сети

рис.2

Операцию **исключающего или** можно представить в виде композиции логических операций

$$x_1 \oplus x_2 = \theta\left(x_1 || x_2 - x_1 \& x_2 - \frac{1}{2}\right),$$

что можно проиллюстрировать на примере модели нейронной сети



Таким образом,

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \frac{1}{2}.$$

Критерии оценки

3 балла. Сделана попытка решить задачу, но решение неверное, так как выбран неправильный способ решения, который не мог привести к правильному результату. Тем не менее, сформулированы какие-либо верные утверждения (или написаны верные формулы)

6 баллов. Выбран правильный способ решения, но допущена ошибка, которая привела к неправильному ответу.

11 баллов. Решение полностью правильное, получен верный ответ.

Решение задачи № 15 (алгоритмы обработки данных)

Решение:

Для решения задачи можно использовать метод "скользящего окна" и хэш-таблицу для хранения текущей уникальной подстроки.

Алгоритм по шагам:

1. Инициализируем два индекса: left (начальное значение - первый символ строки) и right (начальное значение - второй символ строки), которые будут обозначать границы текущей подстроки.

2. Используем хеш-таблицу для хранения символов текущей подстроки. Сложность добавления и проверки наличия символа в среднем O(1).

3. Проходим по строке, увеличивая индекс right, проверяем есть ли символ в позиции right в хеш-таблице.

3.1 Если есть, сдвигаем левую границу окна на позицию, следующую за вхождением этого символа и удаляем все символы, стоящие до этой позиции из хеш-таблицы.

3.2 Если нет, добавляем символ в хеш-таблицу и обновляем текущую максимальную длину подстроки, если она больше предыдущей.

Оценка сложности и дополнительных ресурсов:

- Временная сложность: O(N), где N — количество символов в строке, так как мы проходим по строке скользящим окном один раз. В худшем случае сложность составит 2*N (каждый символ будет добавлен и исключен из хеш-таблицы по 1 разу).

- Память: O(min(N, K)), где K — размер алфавита, так как в хеш-таблице мы храним только уникальную подстроку.

Критерии оценивания:

13 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не более O(N) в среднем с корректной оценкой памяти не более O(N).

10-12 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не выше, чем O(N) в среднем, но при описании алгоритма имеются некритические ошибки, не проанализирована используемая память.

5-9 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не выше, чем O(N * log N) в среднем, алгоритм описан не полностью, может быть неоднозначно истрактован, отсутствует оценка использования памяти.

1-4 балла: представлен некорректный алгоритм, некоторые этапы или идеи которого верны.

Решение задачи № 16 (Случайные процессы)

Решение

Обозначим (для наглядности) $[0,10]=[0,T]$, $[0,15]=[0,T+d]$, где $d=5$, и $n=4$. Найдем условные вероятности для $i=0,\dots,n$:

$$P(N(T)=i|N(T+d)=n)=\frac{P(N(T)=i,N(T+d)=n)}{P(N(T+d)=n)}=$$

в силу независимости приращений пуассоновского процесса:

$$\frac{\exp(-\lambda T)(\lambda T)^i/i!\cdot\exp(-\lambda d)(\lambda d)^{n-i}/(n-i)!}{\exp(-\lambda(T+d))(\lambda(T+d))^n/n!}=$$

$$\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(\lambda T)^i(\lambda d)^{n-i}}{\lambda^n(T+d)^i(T+d)^{n-i}}=$$

$$\frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{T}{T+d}\right)^i\left(\frac{d}{T+d}\right)^{n-i}.$$

Таким образом, условное распределение есть биномиальное распределение $B(n,p)$, где вероятность успеха $p=\frac{T}{T+d}$. Следовательно, искомое математическое ожидание равно np.

Критерии оценки:

Правильный ответ, отсутствие ошибок в формулах, полное и понятное объяснение результатов 10- 11 баллов.

Правильный ответ, отсутствие ошибок в формулах, неполное объяснение результатов 8- 9 баллов.

Правильный ответ, некоторые ошибки в формулах, неполное или непонятное объяснение результатов 6-7 баллов.

Неправильный ответ (или нет ответа), ошибки в формулах, непонятное объяснение результатов 4- 5 баллов.

Неверное понимание формулировки задачи, неверные формулы, непонятное объяснение 0- 3 баллов.

Решение задачи № 17 (Дифференциальные уравнения)

Пусть $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ – решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{1}$$

где $a, b, c, d = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, t – вещественная независимая переменная, $x(t), y(t)$ принимают вещественные значения.

Известно, что существует конечные пределы:

$$x(t) \to \alpha, y(t) \to \beta \text{ при } t \to +\infty, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Верно ли, что

$$\dot{x}(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty? \tag{3}$$

Решение:

Да, это верно.

Сразу заметим, что система (1) всегда имеет решение

$$x(t) = 0, y(t) = 0. \tag{4}$$

В этом случае $\dot{x}(t) = 0 \to 0$ при $t \to +\infty$, утверждение (3) верно.

Пусть $\lambda_{1,2}$ – собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Если собственные значения $\lambda_{1,2}$ различны и вещественны, $\lambda_1 < \lambda_2$, то решение системы (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \overline{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \overline{v}_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Помимо случая (4), условие (2) выполняется для всех решений при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \leqslant 0$, а также для решений вида $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \overline{v}_1$ при $\lambda_1 \leqslant 0, \lambda_2 > 0$: во всех перечисленных случаях соотношение (3) имеет место. Абсолютно аналогично рассматривается случай кратных собственных значений матрицы A в случае диагональной жордановой формы этой матрицы.

В случае кратных собственных значений $\lambda_{1,2} = \lambda$ матрицы A и её жордановой формы вида $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left(C_1 \overline{v}_1 t + C_2 \overline{v}_2 \right), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Помимо случая (4), условие (2) выполняется для всех решений при $\lambda < 0$, а также для решений вида $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} C_2 \overline{v}_2$ при $\lambda = 0$: во всех перечисленных случаях соотношение (3) имеет место.

Если $\lambda_{1,2} = \pm Bi, B \in R \setminus \{0\}$, соотношение (2) выполняется только для решения (4).

Если $\lambda_{1,2} = A \pm Bi, A, B \in R \setminus \{0\}$, соотношение (2) имеет место для решения (4), а также для всех решений при $A < 0$. Здесь опять же выполняется условие (3).

Мы рассмотрели все случаи, проверив доказываемое утверждение.

Критерии проверки:

Верный ответ без объяснений 0 баллов

Приведены верные рассуждения о виде общего решения системы (1): от 8 до 12 баллов в зависимости от полноты ответа и обоснованности рассуждений)

Решение задачи № 18 (ТМО)

П.1. Зафиксируем единицы измерения - минута. Определим следующие экспоненциально (показательно) распределенные независимые случайные величины: θ_A – длина интервала между появлением последовательных заявок типа A, θ_B – длина интервала между появлением последовательных заявок типа B: $\theta_A \sim exp\,(\alpha_1)$ и $\theta_B \sim exp\,(\alpha_2)$, где $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 4$. Вероятность того, что первая поступившая заявка имеет тип A равна вероятности следующего события $P\{\theta_A < \theta_B\} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Предположим, что первая заявка поступила в момент времени τ. Тогда в силу свойств экспоненциального распределения вероятность того, что следующая заявка будет иметь тип A, не зависит от того, какой тип имели предыдущие заявки и в какие моменты они поступили, и также равна $\frac{3}{5}$. Таким образом, вероятность того, что первые три заявки в потоке заявок в систему будут иметь тип A, равна $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^3 = \frac{27}{125}$.

Построение однородного марковского процесса. Определим следующие состояния рассматриваемой системы:

0 – система (прибор) свободен

1 – прибор занят, обслуживает заявку

Определим случайный процесс $\xi\,(t)$ – состояние системы в момент времени t.

Почему $\xi\,(t)$ – однородный марковский процесс? Для обоснования студенту достаточно было указать, что при фиксированном состоянии в момент времени t

- времена до изменения состояния определяются только номером состояния в момент t

- вероятности перехода (в момент скачка) также определяются только номером состояния в момент t.

Определим случайную величину θ – длина интервала между появлением последовательных заявок. По условию задачи в систему поступают два типа заявок, поэтому $\theta = \min\,(\theta_A, \theta_B)$. Так как заявки поступают в соответствии с независимыми однородными процессами Пуассона от двух (независимых) источников, то в силу свойств экспоненциального распределения: $\theta \sim exp\,(\alpha)$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 10$. То есть, суммарный поток заявок будет являться пуассоновским с интенсивностью 10 заявок в час. Обозначим η – время обслуживания заявки прибором , $\eta \sim exp\,(\beta)$, где $\beta = 12$. Напомним, что по условию θ_A, θ_B и η независимы.

Пусть $\xi\,(t) = 0$. Тогда время пребывания в состоянии 0 до скачка распределено так же, как θ (в силу свойства отсутствия памяти для экспоненциального распределения). В момент скачка процесс с вероятностью 1 перейдет в состояние 1.

Пусть $\xi\,(t) = 1$. Время пребывания в состоянии 1 до скачка распределено так же, как η (в силу свойства отсутствия памяти для экспоненциального распределения). В момент скачка процесс с вероятностью 1 перейдет в состояние 0.

Заметим, что время до скачка и вероятности перехода в момент скачка не зависят от t (вытекает из свойств экспоненциального распределения). Таким образом, $\xi\,(t)$ – однородный марковский процесс.

Используя свойства экспоненциального распределения, имеем следующие формулы при $h \to 0$:

$$P\,(\xi\,(t+h) = 1\,|\,\xi\,(t) = 0) = \alpha h + o\,(h) = 10h + o\,(h)\,,$$

$$P\,(\xi\,(t+h) = 0\,|\,\xi\,(t) = 0) = 1 - \alpha h + o\,(h) = 1 - 10h + o\,(h)\,,$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=0\,|\,\xi\left(t\right)=1\right)=\beta h+o\left(h\right)=12h+o\left(h\right)$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=1\,|\,\xi\left(t\right)=1\right)=1-\beta h+o\left(h\right)=1-12h+o\left(h\right),$$

Матрица интенсивностей для сл.пр. $\xi\left(t\right)$

$$Q=\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $v\left(t\right)$ одномерное распределение для сл.пр. $\xi\left(t\right)$: $v_j\left(t\right)=P\left\{\xi\left(t\right)=j\right\}, j=0,1$

П.2. Ответ на п. 2 равен значению $v_0\left(\frac{1}{3}\right)$. Запишем дифференциальные уравнения Колмогорова $v\left(t\right)$ ($v\left(t\right)$ - вектор-строка):

$$v'\left(t\right)=v\left(t\right)Q$$

Так как $v_0\left(t\right)+v_1\left(t\right)=1$, то получаем уравнение для $v_0\left(t\right)$: $v_0'\left(t\right)=-22v_0\left(t\right)+12$. Его общее решение есть $v_0\left(t\right)=Ce^{-22t}+\frac{6}{11}$. По условию в начальный момент времени прибор не занят, то есть, $v_0\left(0\right)=1$. Отсюда $C=\frac{5}{11}$. Тогда

$$v_0\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{11}e^{-22/3}+\frac{6}{11}$$

П.3 Обозначим распределение вероятностей для рассматриваемого случайного процесса в установившемся (или стационарном режиме) через $\pi=\left(\pi_0,\pi_1\right)$. Уравнение для стационарного распределения вероятностей $\pi Q=0$. Отсюда находим

$$\pi_0=\frac{6}{11},\quad \pi_1=\frac{5}{11}$$

В установившемся режиме вероятность потери заявки равна вероятности того, что прибор занят, т.е. $\frac{5}{11}$.

П.4 В установившемся режиме вероятность потери заявки равна $\pi_1=\frac{5}{11}$. Заявки типа A поступают в соответствии с однородным процессом Пуассона с интенсивностью $\alpha_1=6$. По свойствам процесса Пуассона потерянные заявки также образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\pi_1\alpha=\frac{30}{11}$. Отсюда среднее число потерянных заявок типа A за 1 час работы равно $60\cdot\frac{30}{11}=\frac{1800}{11}$.

Критерии проверки:

11 баллов - Все ответы верное. Полные обоснованные решения.

8-10 баллов - Все ответы верные, однако решения не являются полными и обоснованными.

6-7 баллов - Три верных ответа, есть недочеты в обосновании (решения не являются полными).

4-5 баллов - Два верных ответа, есть недочеты в обосновании (решения не являются полными).

2-3 балла - Нет ответов, но есть верные идеи, которые могли бы привести к верному решению задачи.

0,5-1 балл - выписан ответ на первый вопрос. Однако обоснования нет, либо обоснование неверное.

0 баллов - нет ни одного верного ответа, решений нет, нет верных идей.