
Высшая лига 2025.

Инвариантная часть.

№1 Математическая статистика.

Каждый день в течение 100 дней Мария добиралась с работы домой на такси, выбирая каждый раз один из четырех тарифов: «Эконом», «Комфорт», «Комфорт +» и «Бизнес». Аналитик из компании, предоставляющей услуги такси, доступны следующие данные о тарифах поездок Марии: 24 раза она выбирала «Эконом», 56 раз — «Комфорт», 16 раз — «Комфорт +» и 4 раза — «Бизнес». С помощью критерия хи-квадрат аналитик решил протестировать гипотезу о том, что Мария выбирает «Эконом» и «Комфорт» с равной вероятностью, а «Комфорт+» и «Бизнес» тоже с равными вероятностями, которые в два раза меньше вероятности выбрать «Эконом». На уровне значимости 5% проверьте гипотезу, выдвинутую аналитиком компании.

Решение:

Общее количество поездок: $n = 100$.

Рассчитаем вероятности, чтобы сформулировать нулевую гипотезу:

$$2p + 2 \cdot \frac{p}{2} = 3p = 1 \implies p = \frac{1}{3}.$$

Основная гипотеза H_0 имеет вид:

$$P(\text{Эконом}) = P(\text{Комфорт}) = \frac{1}{3},$$

$$P(\text{Комфорт+}) = P(\text{Бизнес}) = \frac{1}{6}.$$

Наблюдаемые частоты:

- Эконом: $O_1 = 24$,
- Комфорт: $O_2 = 56$,
- Комфорт+: $O_3 = 16$,
- Бизнес: $O_4 = 4$.

Рассчитаем ожидаемые частоты E_i :

$$E_1 = 100 \cdot \frac{1}{3} \approx 33.33,$$

$$E_2 = 100 \cdot \frac{1}{3} \approx 33.33,$$

$$E_3 = 100 \cdot \frac{1}{6} \approx 16.67,$$

$$E_4 = 100 \cdot \frac{1}{6} \approx 16.67.$$

Расчёт статистики χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(24 - 33.33)^2}{33.33} + \frac{(56 - 33.33)^2}{33.33} + \frac{(16 - 16.67)^2}{16.67} + \frac{(4 - 16.67)^2}{16.67}.$$

$$\chi^2 \approx \frac{86.99}{33.33} + \frac{514.47}{33.33} + \frac{0.45}{16.67} + \frac{160.53}{16.67} \approx 2.61 + 15.44 + 0.03 + 9.63 = 27.71.$$

Проверка гипотезы:

- Число степеней свободы: $df = 4 - 1 = 3$.
- Критическое значение: $\chi_{0.95,3}^2 \approx 7.81$ (в примечании задания было указано неверное значение квантили, однако, при его использовании баллы не снимались).
- Сравнение: $27.71 > 7.81$.

Вывод: гипотеза аналитика о равных вероятностях выбора тарифов отвергается на уровне значимости 5%, так как расчётное значение $\chi^2 \approx 27.71$ превышает критическое значение 7.81.

Критерии оценивания:

- За найденные вероятности, используемые в нулевой гипотезе — 2 балла.
- За верно примененный критерий χ^2 , включая верно рассчитанные наблюдаемые и ожидаемые частоты — 8 баллов.
- За верно построенную критическую область (в частности, верно определенное число степеней свободы) и сделанный вывод — 4 балла.

№4 Математический анализ

Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решение.

Заметим, что каждую дробь внутри предела можно записать как $\frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ и представить в виде суммы простых дробей $\frac{\alpha}{(k-1)} + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma}{(k+1)}$, где α, β, γ — некоторые неизвестные коэффициенты. Это можно сделать, например, с помощью метода неопределённых коэффициентов, тогда

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{\alpha k(k+1) + \beta(k-1)(k+1) + \gamma(k-1)k}{(k-1)k(k+1)},$$

откуда $1 = \alpha k^2 + \alpha k + \beta k^2 - \beta + \gamma k^2 - \gamma k$. Приравнявая коэффициенты при каждой степени k , получаем 3 равенства:

$$0 = \alpha + \beta + \gamma;$$

$$0 = \alpha - \gamma;$$

$$1 = -\beta.$$

Отсюда следует, что $\beta = -1$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$. Таким образом получаем, что

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}. \quad (1)$$

Используем полученное соотношение (1) в искомом пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right) + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \right) \right).$$

Из такой записи видно, что все дроби вида $\frac{1}{m}$, где $m = 3, 4, \dots, n$, сократятся. Тогда в итоге останется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Критерии.

1. Корректно получено (любым способом) выражение (1) — 4 балла.

2. Корректно получен итоговый ответ — 3,25 балла.

(*) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

№5 Математический анализ

Последовательность (a_k) задана рекуррентным соотношением:

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{1+a_k}{2}}$$

и начальным условием: $a_0 = \frac{5}{3}$. Найдите бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

или докажите, что это произведение расходится.

Ответ. $\frac{4}{3 \ln(3)}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x + x^{-1})$, $x > 0$. Легко заметить, что она удовлетворяет уравнению:

$$f(x^2) = 2f^2(x) - 1.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}} = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Кроме того, $a_0 = \frac{5}{3} = \frac{1}{2}(3 + 3^{-1}) = f(3)$.

Следовательно, для всех натуральных чисел k имеем:

$$a_k = f\left(3^{\frac{1}{2^k}}\right) = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2^k}} + 3^{-\frac{1}{2^k}}\right). \quad (*)$$

Введем обозначение: $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$. Тогда

$$P_n = \frac{1}{2^n} \left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right) \left(3^{\frac{1}{4}} + 3^{-\frac{1}{4}}\right) \dots \left(3^{\frac{1}{2^n}} + 3^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

Отсюда

$$P_n \left(3^{\frac{1}{2^n}} - 3^{-\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{2^n} (3 - 3^{-1}) = \frac{8}{3 \cdot 2^n}$$

и, значит,

$$P_n = \frac{8}{3 \cdot 2^n \cdot \left(3^{\frac{1}{2^n}} - 3^{-\frac{1}{2^n}}\right)}. \quad (**)$$

Остается найти предел $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$. Для этого достаточно найти предел

$$L_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t}{3 \cdot (3^t - 3^{-t})}$$

(если предел L_1 существует, то существует и предел L , и эти пределы равны: используем равносильность определений предела по Коши и по Гейне).

Ну а предел L_1 легко найти, например, по правилу Лопиталя. Окончательно, имеем:

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t}{3 \cdot (3^t - 3^{-t})} = \frac{4}{3 \ln(3)}. \quad (***)$$

Критерии.

1. Корректно получено (любым способом) выражение (*) – 3,25 балла.
 2. Корректно получено (любым способом) выражение (**) – 3 балла. Если оно получено минуя выражение (*), то – 6,25 балла.
 3. Правильно вычислен предел (***) – 1 балл.
- (*) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Дифференциальные уравнения

Решите дифференциальное уравнение $\left(\frac{x^2}{y} + 2x^3 - y\right) dx + \left(x + 2xy^2 - \frac{x^3}{y^2}\right) dy = 0$.

Критерии. Введём обозначения $P = \frac{x^2}{y} + 2x^3 - y$ и $Q = x + 2xy^2 - \frac{x^3}{y^2}$.

1. (1,25 балла) Участник указал в решении, что структура уравнения похоже на уравнение с разделяющимися переменными, однако таковым не является ввиду того, что $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2. (3 балла) Участник предложил найти интегрирующий множитель.

3. (3 балла) Есть корректные попытки найти интегрирующий множитель μ такой, что $\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$ в виде $\mu(x)$ или $\mu(y)$, либо присутствуют попытки угадать интегрирующий множитель с последующими попытками выделить полные дифференциалы для решения уравнения.

№7 Линейная алгебра

1
3
5

Для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ и натурального числа k действительную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ назовем

- X -матрицей, если все ее элементы принадлежат множеству X , т.е.

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) a_{ij} \in X.$$

- k -квазиразреженной, если ее минимальный элемент встречается в ней не менее k раз, т.е.

$$\left| \left\{ (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} = \min_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right\} \right| \geq k.$$

Пусть $n(k)$ есть минимальное натуральное число n , удовлетворяющее следующему условию: для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$, содержащего по крайней мере два элемента, существует хотя бы одна невырожденная k -квазиразреженная X -матрица размера $n \times n$. Найдите $n(4095000)$.

Ответ. 2025.

Решение.

Лемма. Для любых натуральных чисел n и k , $k \geq 3$, следующие условия равносильны:

1. для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$, содержащего по крайней мере два элемента, существует хотя бы одна невырожденная k -квазиразреженная X -матрица размера $n \times n$,
2. $k \leq n^2 - n$.

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $k > n^2 - n$. Тогда при $X = \{0, 1\}$ каждая k -разреженная X -матрица содержит нулевую строку, а следовательно, вырождена.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $k \leq n^2 - n$. Поскольку $k \geq 3$, имеем: $n \geq 3$. Пусть X есть произвольное подмножество $\mathbb{R}$, содержащее по крайней мере два элемента. Выберем числа $a < b \in X$ и рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a & a \\ a & b & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a & b \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a & a \\ a & b & a & \dots & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$ (матрица B получена из матрицы A транспозицией элементов a_{11} и a_{2n}). Очевидно, обе из них k -квазиразреженные. Покажем, что по крайней мере одна из них невырождена. Действительно, если $a = 0$, то невырождена матрица A (поскольку диагональна с элементом b на диагонали). Если же $a \neq 0$, то невырождена матрица B : ее определитель равен $a(b - a)^{n-1} \neq 0$, что может быть легко подсчитано, если первую строку вычесть из остальных и разложить определитель по первому столбцу. $\square$

Таким образом, задача сводится к отысканию минимального натурального решения неравенства $n^2 - n \geq 4095000$, что осуществляется школьным методом с помощью калькулятора. Получаем ответ: 2025.

Критерии.

1. Корректно установлена справедливость Леммы (или равносильного утверждения) – 5 баллов, из них:
 - (a) за корректное установление импликации (1) $\Rightarrow$ (2) или равносильного утверждения – 1 балл,
 - (b) за корректное установление импликации (2) $\Rightarrow$ (1) или равносильного утверждения – 4 балла.
2. Минимальное натуральное решение неравенства $n^2 - n \geq 4095000$ найдено верно – 2,25 балла.
- (*) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Вариативная часть.

№8 Математическая статистика–2.

Andrew and Ivan compete in the speed of problem solving. They play 10 rounds against each other by solving one problem in each round. All the solution times are independent. The problem solution times for Andrew are exponentially distributed with rate 1. The problem solution times for Ivan are exponentially distributed with unknown rate λ .

In 9 out of the 10 rounds the winner solved the problem in less than one minute.

Find the maximum likelihood estimator of λ .

Solution:

Let X and Y be random variables representing the time taken by Andrew and Ivan, respectively, to solve a problem. Then $V = \min(X, Y)$ is the best result in the round. Its c.d.f. is

$$F_V(v) = P(\min(X, Y) \leq v) = 1 - P(\min(X, Y) > v) = 1 - P(X > v, Y > v) =$$

$$= 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - (e^{-1v}) (e^{-\lambda v}) = 1 - e^{-(1+\lambda)v}.$$

It is an exponential distribution with $\lambda = 1 + \lambda$.

Since $P(V \leq 1) = 1 - e^{-(1+\lambda)}$ and $P(V > 1) = e^{-(1+\lambda)}$ likelihood is

$$L = (1 - e^{-(\lambda+1)})^9 (e^{-(\lambda+1)})$$

$$\ln L = 9 \ln (1 - e^{-(\lambda+1)}) - (\lambda + 1)$$

F.O.C.:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L = 9 \frac{e^{-(\lambda+1)}}{1 - e^{-(\lambda+1)}} - 1 = 0$$

$$\frac{e^{-(\lambda+1)}}{1 - e^{-(\lambda+1)}} = \frac{1}{9}$$

$$1 = 10e^{-(\lambda+1)}$$

$$e^{-(\lambda+1)} = \frac{1}{10}$$

$$-\lambda - 1 = \ln(0.1)$$

$$\hat{\lambda}^{ML} = -\ln(0.1) - 1 \approx 1.3.$$

Критерии оценивания:

- За вывод функции распределения зафиксированного времени решения задачи — 4 балла.
- За верно найденную ML оценку параметра λ — 3,25 балла.

№ 9 Математическая статистика

У Артема есть 5 наблюдений за случайной величиной X , имеющей нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2 (к сожалению Артем забыл, чему равна дисперсия, но она точно известна): 2, 5, 7, 4, 12.

а) При проверке гипотезы $H_0 : \mu = 10$ против двусторонней альтернативной гипотезы $H_1 : \mu \neq 10$ Артем получил $p - value = 0.3174$. Чему в таком случае равна дисперсия случайной величины σ^2 ?

б) Далее Артем хочет проверить гипотезу $H_0 : \mu = 10$ против альтернативной $H_1 : \mu = 5$ на уровне значимости 5%. Чему в таком случае равна мощность теста?

Ответ: а) 80 б) 0.3446

Решение.

Пункт а).

По условию дисперсия считается известной, тогда для проверки гипотезы Артем использовал z -статистику вида

$$z_p = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0; 1). \quad (1)$$

Заметим, что при двусторонней альтернативной гипотезе $p - value$ из условия равен $p - value = 2(1 - \Phi(|z_p|)) = 0.3174$, откуда можем выразить

$$\Phi(|z_p|) = 1 - \frac{0.3174}{2} = 0.8413. \quad (2)$$

В таком случае из таблицы стандартного нормального распределения имеем $|z_p| = 1$, при этом $\bar{X} = \frac{2+5+7+4+12}{5} = 6$. Далее подставим все в выражение для тестовой статистики (1):

$$|z_p| = \frac{|6 - 10|}{\sqrt{\sigma^2/5}} = 1, \quad (3)$$

таким образом $\sigma^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$.

Пункт б).

Так как при проверке такой гипотезы $5 < 10$, то можно воспринимать H_1 как левостороннюю альтернативу (аналогичные дальнейшие рассуждения для двусторонней альтернативы также зачитывались как верные). Мощность теста — это вероятность отвергнуть H_0 при условии, что H_0 не верна. На 5% уровне значимости H_0 будет отвергаться при $z_p < -1.65$.

$$z_p = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{80/5}} = \frac{\bar{X} - 10}{4}, \quad (4)$$

то есть условие отвержения H_0 при $z_p < -1.65$ эквивалентно тому, что H_0 отвергается при $\bar{X} < 3.4$. Тогда мощность теста

$$\begin{aligned}
P(H_0_is_rejected \mid H_0_is_not_true) &= P(\bar{X} < 3.4 \mid \mu = 5) = P\left(\frac{\bar{X} - 5}{\sqrt{80/5}} < \frac{3.4 - 5}{\sqrt{80/5}}\right) = \\
&= P(z < -0.4) = 1 - P(z < 0.4) = 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446. \quad (5)
\end{aligned}$$

Критерии пункта а).

1. Корректно записана формула для тестовой статистики (1) – 0,25 балла.
2. С помощью таблицы корректно найдено значение $|z_p|$ – 1 – 2 балла.
3. Получен верный итоговый ответ для дисперсии – 1 балл.

Критерии пункта б).

1. За верные рассуждения про мощность теста, альтернативную гипотезу и получение условия отвержения H_0 при $\bar{X} < 3.4$ – 2 балла.

2. Корректно получен итоговый ответ для мощности теста (5) – 2 балла.

* Если в пункте а) не было найдено значение дисперсии, то за пункт б) максимально можно получить – 0,5 балла.

** Если в пункте а) было найдено *неверное* значение дисперсии, то за пункт б) максимально можно получить – 2 балла.

№10 Теория вероятностей

Поставщик взял на себя обязательство доставлять Заказчику не менее одной тонны товара в день. Отправляя товар, Поставщик загружает его ровно одну тонну. Однако, при доставке некоторая часть товара может быть утеряна. В этом случае Поставщик отправляет Заказчику еще одну тонну товара, которая вновь может быть частично утеряна по дороге, и т.д. пока у Заказчика не накопится по крайней мере тонна товара. Будем считать, что (а) доля потерь при каждой доставке есть случайная величина X , равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, (б) все эти случайные величины независимы. Найдите

1. для каждого натурального числа k вероятность того, что Поставщику придется совершить более k рейсов в день,
2. математическое ожидание количества рейсов Поставщика в день.

Ответ. 1. $\frac{1}{k!}$; 2. e .

Решение. Пусть число рейсов поставщика в день есть случайная величина ξ , а доля дошедшего до заказчика товара за один рейс есть случайная величина Z . Тогда условие $\xi > k$ равносильно условию $Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{k-1} < 1$, где $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}$ — независимые случайные величины, распределенные как величина Z . Поскольку $Z = 1 - X$, каждая величина Z_i , $i < k$, имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Поэтому

$$P(\xi > k) = \int \int \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k < 1}} dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

Этот интеграл можно подсчитать, например, так. Обозначим

$$I_k(\alpha) = \int \int \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k < \alpha}} dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

Легко проверить, что для всех $\alpha > 0$ выполнено:

$$I_k(\alpha) = \alpha^k I_k(1)$$

(можно сделать замену $x_1 = \alpha y_1$, $x_2 = \alpha y_2$, ..., $x_k = \alpha y_k$).

Из этого можно вывести рекуррентное соотношение

$$I_k(1) = \int_0^1 I_{k-1}(1 - x_1) dx_1 = \int_0^1 (1 - x_1)^{k-1} dx_1 \cdot I_{k-1}(1) = \frac{1}{k} \cdot I_{k-1},$$

которое приводит к формуле $I_k(1) = \frac{1}{k!}$. На первый вопрос ответ получен.

Чтобы получить ответ на второй, можно воспользоваться формулой:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi > k).$$

С учетом того, что $P(\xi > 0) = 1$, имеем:

$$E(\xi) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e.$$

Критерии.

1. Корректно полученный ответ на вопрос 1. – 5 баллов.
 2. Корректно полученный ответ на вопрос 2. – 2,25 балла.
- (*) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

№ 11. Оптимизация

Петя задумал заработать на изготовлении столов и стульев.

С этой целью он взял в аренду два разных станка (строгальный и фрезерный) на пять суток. Аренда строгального станка обошлась даром, а за аренду фрезерного пришлось заплатить семь долларов в час.

Для изготовления одного стола необходимо четыре часа поработать на строгальном станке и один час на фрезерном. Для изготовления одного стула необходимо два часа поработать на строгальном станке и три часа на фрезерном. Работать можно круглые сутки без отдыха.

Рыночная цена одного стола такого типа составляет восемь долларов. Рыночная цена одного стула такого типа составляет семь долларов.

Основной своей задачей Петя видит максимизацию дохода от реализации продукции. Второй по важности задачей он рассматривает минимизацию потерь от простоя станков.

Сколько столов и стульев должен изготовить Петя, чтобы решить поставленные задачи, если он согласен для этого на снижение максимального дохода на 10%.

Необходимо рассчитать:

- производственный план, который максимизирует доход, и сам доход (2 балла)
- производственный план, который минимизирует потери, и сами потери (2 балла)
- компромиссный производственный план с указанием дохода и потерь (3.25 балла).

Комментарий. Компромиссный план может содержать дробное число столов и/или стульев.

A task.

Petya decided to make money by making tables and chairs.

For this purpose, he rented two different machines (planing and milling) for five days. The rent of planing machine was for nothing. However, Petya had to pay seven dollars an hour to rent a milling machine.

To make one table, Petya need to work four hours on a planing machine and one hour on a milling machine. To make one chair, Petya need to work two hours on a planing machine and three hours on a milling machine. Petya can work around the clock without rest.

The market price of one table of this type is eight dollars. The market price of one chair of this type is seven dollars.

Petya sees maximizing income from product sales as his main task. He considers minimizing losses from machine downtime to be the second most important task.

How many tables and chairs should Petya make in order to solve the tasks, if he agrees to reduce the maximum income by 10%. It is necessary to calculate:

- a production plan that maximizes income, and income itself (2 points)
- a production plan that minimizes losses, and the losses themselves (2 points)
- a compromise production plan with income and losses (3.25 points).

Comment. A compromise plan may contain a fractional number of tables and/or chairs.

Решение

Обозначим x_1 — количество столов, x_2 — количество стульев

1. Для решения основной задачи Пете необходимо решить задачу линейного программирования для максимизации дохода

$$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 7x_2 \xrightarrow{x_1, x_2} \max$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120 \text{ (пять суток!)}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

Проще всего исследовать целевую функцию в вершинах выпуклого множества решений. В итоге получаем $x_1 = 12, x_2 = 36, F_{\max} = 348$ долларов

2. Вторая задача решается аналогично путем минимизации потерь от простоя техники или, что аналогично максимизацией полезных расходов на аренду техники.

$$G(x_1, x_2) = 7 * 120 - 0 * (4x_1 + 2x_2) - 7 * (x_1 + 3x_2) \xrightarrow{x_1, x_2} \min$$

или

$$V(x_1, x_2) = 7(x_1 + 3x_2) \xrightarrow{x_1, x_2} \max$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

В итоге получаем $x_1 = 0, x_2 = 40, F_{\max} = 840$. При таком производственном плане потери будут равны нулю. Однако, он не соответствует плану, который максимизирует доход.

3. Компромиссное решение. Используем метод последовательных уступок.

$$V(x_1, x_2) = 7(x_1 + 3x_2) \xrightarrow{x_1, x_2} \max$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$8x_1 + 7x_2 \geq 348 - 0.1 * 348 = 313.2$$

В итоге получим $x_1 = 5,858..., x_2 = 38,047..., F_{\max} = 840$.

Для проверки можно использовать online сервис симплекс метода

<https://programforyou.ru/calculators/simplex-method?ysclid=m73nujivz7177157500>

и online сервис решения систем линейных алгебраических уравнений

<https://ru.onlinemschool.com/math/assistance/equation/haus/>