

Всероссийский конкурс исследовательских и проектных работ
школьников «Высший пилотаж»

Построение верхней полуплоскости треугольника Паскаля

Исследовательская работа
Направление «Математика»

Автор: Авдюничева Ксения Константиновна
Ученица 11 класса ГБОУ школы №444, г. Москва
Научный руководитель: Буланкина Вера Валерьевна

Содержание

1	Введение	3
2	Определения	3
3	Формулировка основного результата	4
4	Другие результаты и возможные продвижения в теме	6
4.1	$f(0; y) = F_y$	6
4.2	Гипотеза об отражении	7
4.3	Работа с матрицами	8
5	Выводы	10
6	Список литературы	11

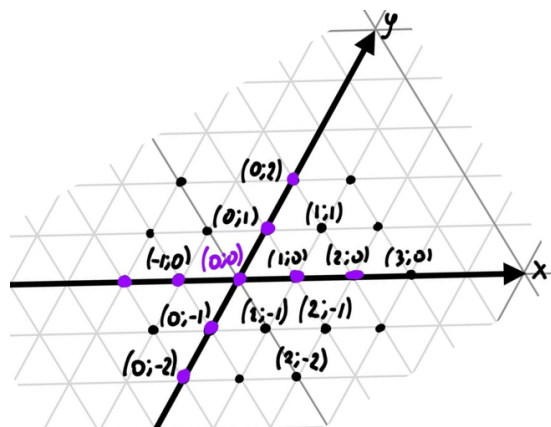
1 Введение

Треугольник Паскаля — известный математический объект, обладающий большим количеством свойств. В нём можно найти треугольник Серпинского, последовательность чисел Фибоначчи, биномиальные коэффициенты, числа сочетаний, степени двойки и одиннадцати и другие интересные ряды и последовательности. Мы посмотрим, что будет, если рассмотреть треугольник как часть целочисленной решётки и попробовать его «продлить» за существующие границы, сохраняя рекуррентное соотношение на элементы. Какие тогда мы получим свойства и объекты? В ходе работы мы определим функцию $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, благодаря которой сможем задать сам треугольник требуемым образом, а также научиться его «продлевать». В работе, помимо общей концепции того, как заполнить целочисленную решётку, рассмотрен один из случаев, когда при подстановке определённых значений в нашу функцию при «продлении» образуется новый объект — треугольник, похожий на «повёрнутый» треугольник Паскаля. Мы разберёмся со свойствами полученного треугольника, а также узнаем несколько других фактов, возникающих при подстановке в функцию других значений.

2 Определения

Пусть функция $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ называется «хорошей», если:

- $f(x; y) = f(x - 1; y + 1) + f(x; y + 1)$, для любых x, y
- $f(0; 0) = 1$
- $f(x, 0) = 0$, для любого $x \neq 0$



Заметим, что значения «хорошей» функции для всех $y > 0$ по условию не заданы. Научимся задавать «верхнюю» полуплоскость.

Пусть $f(x; 1) = a$ для какого-то x . Заметим, что все остальные значения функции, у которых $y = 1$, однозначно задаются по этому числу, т.к. значение функции выражается через число, соседнее с ним, и число в нижней строчке, которое уже было задано. Таким образом мы получаем однозначно заданную строку через одно число. То есть, задавая одно число для каждого $y > 0$, мы заполним всю плоскость.

(Заметим, что строка однозначно задаётся, независимо от того, на каком месте мы определили число a .)

Введём обозначения для описания «хороших» функций:

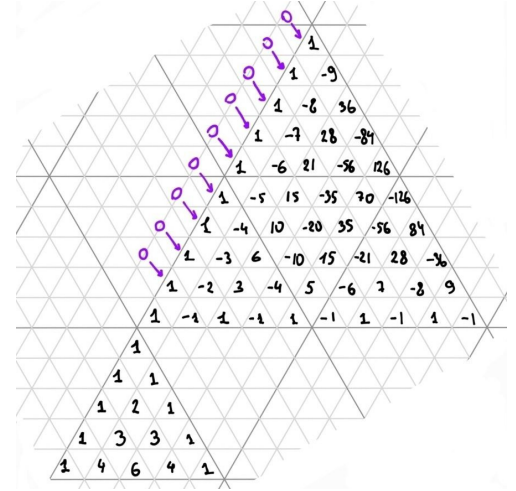
- $f(x_1; 1) = a_1$, $f(x_2; 2) = a_2$, $f(x_3; 3) = a_3, \dots$, где $(x_i; i)$ — координаты, значения функции в которых равно a_i .
- Если для $\forall i$ $x_i = x_0$: $f(x_0; y) = \{a_1, a_2, \dots\}$.

- Если для $\forall i \ x_i = x_0$ и $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ - последовательность a_y : $f(x_0; y) = a_y$.
- Если для $\forall i \ x_i = x_0$ и для $\forall j \ a_j = a_0$, где $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ - последовательность a_y : $f(x_0; y) = a_0$.

3 Формулировка основного результата

Основным результатом работы является разбор случая $f(0; y) = 1$, определение полученных свойств и их доказательство.

Возьмём обычный треугольник Паскаля и получим его «отражение». Пусть значение функции с координатами $(0; y)$ равно 1 для любого y . Тогда все значения функции, у которых $x < 0$ равны 0. Посмотрим на то, какие значения принимает функция для любых $x, y > 0$.



Свойства:

0. $f(x; y) = 0$, для любого $x < 0$ и любого y .
1. Для любого $x \geq 0$ и любого y выполняется равенство:
 - если x нечётно: $f(x; y) = -f(x; (1 - x - y))$
 - если x чётно: $f(x; y) = f(x; 1 - x - y)$

Следствие: Полученный нами треугольник является поворотом треугольника Паскаля, у которого числа в строке чередуют знак. Это означает, что в нашем треугольнике образуются биномиальные коэффициенты $(a - b)^n$. Позже выяснилось, что описание подобного построения есть в книге "Конкретная математика"[1](стр.209).

2. Для любого натурального $b > 1$ сумма всех значений функции вида $f(x; y = b - x)$ равна 0.

Доказательство свойства 0:

Будем доказывать индукцией по x .

База индукции ($x = -1$):

$$f(0; y - 1) = f(-1; y) + f(0; y). \quad f(-1; y) = f(0; y - 1) - f(0; y) = 1 - 1 = 0.$$

Переход:

Пусть $f(x; y) = 0$ для любого $0 > x > k$. Пусть $x = k$:

$$f(k; y - 1) = f(k - 1; y) + f(k; y). \quad f(k - 1; y) = f(k; y - 1) - f(k; y) = 0 - 0 = 0.$$

Доказательство свойства 1:

Сначала докажем по индукции по x , что для любого $x > 0$ и $y = 0$ выполняется утверждение. Затем докажем по индукции по y , что утверждение выполнено для любых x, y , удовлетворяющих условиям.

База индукции ($y = 0$):

Докажем, что для любого нечётного x выполнено $f(x; 0) = -f(x; (1 - x))$ и для любого чётного x выполнено $f(x; 0) = f(x; (1 - x))$. Вспомним, что для любого $x \neq 0$ $f(x; 0) = 0$, а также $f(x; (1 - x)) = 0$, т.е. $f(x; 0) = f(x; (1 - x))$. Для $x = 0$ $f(0; 0) = 1 = f(0; -1)$. То есть, случай $y = 0$ доказан.

Переход: Пусть утверждение верно для всех $y \leq t$, докажем для $y = t + 1$.

База для x :

$x = 0$: $f(0; t + 1) = 1 = f(0; -t)$.

$x = 1$: $f(1; t + 1) = t + 1 = -f(f(1; -t - 1))$.

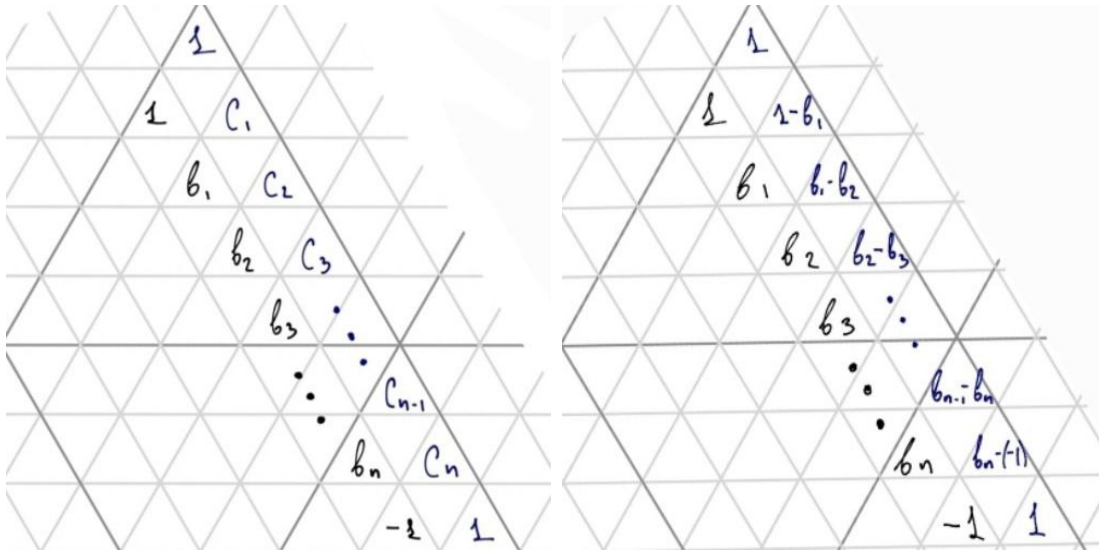
Переход для x : Пусть утверждение верно для $x \leq k$, Докажем для $x = k + 1$.

1. Пусть $x = 2k$. Нужно доказать, что $f(2k; t+1) = f(2k; -2k-t)$. По определению функции $f(2k; t+1) + f(2k-1; t+1) = f(2k; t)$, т.е. $f(2k; t+1) = f(2k; t) - f(2k-1; t+1)$. При этом, по предположению индукции $f(2k; t) = f(2k; 1-2k-t)$, $f(2k-1; t+1) = -f(2k-1; 1-2k-t) \Rightarrow f(2k; t+1) = f(2k; 1-2k-t) + f(2k-1; 1-2k-t) = f(2k; -2k-t)$.
2. Пусть $x = 2k+1$. Нужно доказать, что $f(2k+1; t+1) = -f(2k+1; -2k-t-1)$. По определению функции $f(2k+1; t+1) + f(2k; t+1) = f(2k+1; t)$, т.е. $f(2k+1; t+1) = f(2k+1; t) - f(2k; t+1)$. При этом, по предположению индукции $f(2k+1; t) = -f(2k+1; -2k-t)$, $f(2k; t+1) = f(2k; -2k-t) \Rightarrow f(2k+1; t+1) = -f(2k+1; -2k-t) - f(2k; -2k-t) = -f(2k+1; -2k-t-1)$.

Доказательство свойства 2:

1. Для конкретного $y = b - x$ будем рассматривать только значения нашей функции, у которых $0 \leq x \leq b$, т.к. для других значений x $f(x; y) = 0$.
2. Треугольник Паскаля симметричен относительно его вертикали, то есть для всех $y \leq 0$ значения функции симметричны относительно прямой $y = -2x$. При этом каждой паре симметричных чисел треугольника Паскаля сопоставлена пара противоположных по знаку чисел значений нашей функции. Тогда для $b = 2t$ (т.е. чётного количества ненулевых значений функции вида $f(x; y = b - x)$) для каждого значения есть значение, противоположное ему по знаку, то есть, общая сумма значений функции $f(x; 2t - x)$.
3. Посмотрим на то, как формируются ненулевые значения функций вида $f(x; y = b - x)$, где b - нечётно. На прямой $y = b - x - 1$ чётное количество ненулевых элементов. Вначале стоит 1, а затем числа $b_1, b_2, \dots, 1$ (см картинку). Тогда посмотрим, как образуются числа на прямой $y = b - x$: в начале стоит 1, а дальше стоят числа $c_1, c_2, \dots, -1$. По определению функции: $1 = 1 - 0$, $c_1 = b_1 - 1$, $c_2 = b_2 - b_1$, ..., $c_{n-1} = b_n - b_{n-1}$, $c_n = -1 - b_n$, $1 = 0 - (-1)$. Посмотрим на сумму c_i . Каждое число b_j встречается в ней два раза - один с минусом,

второй с плюсом, -1 из c_1 и c_n и две 1 («верхняя» и «нижняя») дают ноль в сумме. Таким образом, в строках с нечётным количеством чисел, сумма также равняется нулю. Свойство доказано.

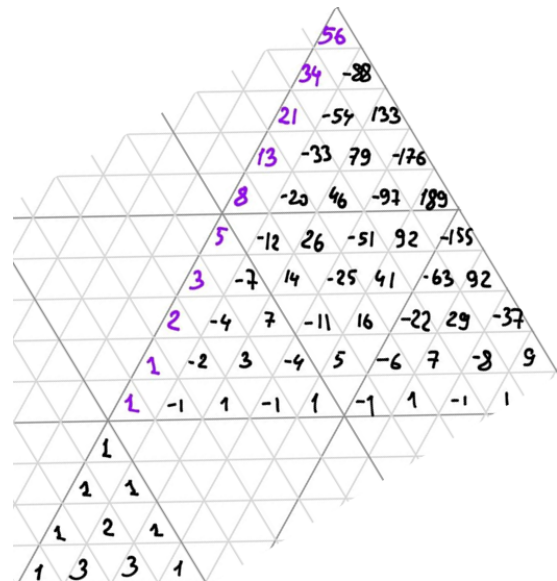


4 Другие результаты и возможные продвижения в теме

4.1 $f(0; y) = F_y$

Посмотрим на другой пример расстановки чисел в значения функции с координатами $(0; y)$ для $y > 0$.

F_y - последовательность чисел Фибоначчи. Договоримся, что $F_0 = 1$, $F_1 = 1$. Понятно, что теперь функция с координатами, где $x < 0$, не равна нулю, но мы рассмотрим только значения в координатах, где $x, y \geq 0$. Получаем следующую картину:



Если взять все значения функций по модулю, то можно получим треугольник, похожий на «правую» часть треугольника Риордана, который задаётся следующим образом и выглядит так [2][3]:

- $T(n, 0) = T(n, 2n) = 1$ для любого $n \geq 0$
- $T(n, 1) = 1$ для любого $n \geq 1$
- $T(n, k) = T(n - 1, k - 2) + T(n - 1, k - 1)$ для любого $k = 2, \dots, 2n - 1, n \geq 2$

0:																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Соответствие можно установить по посчитанным первым значениям нашей функции, но нельзя утверждать, что данный факт останется верным для всего треугольника. При этом, есть несколько доказанных свойств нашего построения, которые имеют связь с треугольником Риордана.

Свойства:

Будем рассматривать последовательности модулей значений функций при конкретных значениях y .

0. $y = 0$: 1, 1, 1, 1,...; — $a_n = 1$ или $a_n = T(n, 2n)$.
1. $y = 1$: 1, 2, 3, 4, 5, 6,...; — $a_n = n$ или $a_n = T(n, 2n - 1)$.
2. $y = 2$: 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29,...; — $a_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 1$ или $a_n = T(n, 2n - 2)$.
(Максимальное количество частей, образующихся при разрезании блина за n разрезов). [4]
3. $y = 3$: 3, 7, 14, 25, 41, 63, 92,...; — $a_n = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ или $a_n = T(n, 2n - 3)$. [5]
4. $y = 4$: 5, 12, 26, 51, 92, 155,...; — $a_n = T(n, 2n - 4)$ (Число плоских областей после построения (в общем положении) выпуклого n -угольника и всех его диагоналей). [6]
5. (не найдена связь с треугольником Риордана, но, возможно, найдена последовательность). Для конкретного $n > 0$ сумма всех значений функции вида $f(x; y = n - 2x)$ равна $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_{n-2k}^{2k}$: 1, 1, 1, 1, 2, 4, 7, 11, ... [7].

Запрограммировано. Не доказано.

4.2 Гипотеза об отражении

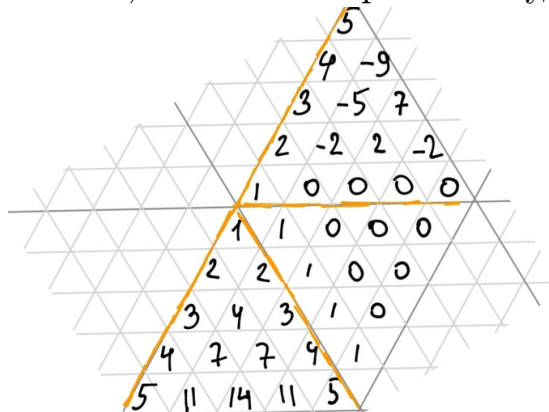
Заметим, что в разобранных случаях мы никак не использовали значения функции в «нижней» полуплоскости. Давайте теперь переопределим нашу функцию, зададим другие числа в «нижней» полуплоскости и рассмотрим треугольник, полученный на месте треугольника Паскаля. Гипотеза состоит в том, что, какие бы значения не принимала функция для $y \leq 0$, мы можем так достроить плоскость вверх, чтобы получилось отражение выделенного нами треугольника. (При этом мы не будем рассматривать значения функции в точках, у которых координата

по x отрицательна. Это не будет влиять на итоговый результат, но упростит нам задачу).

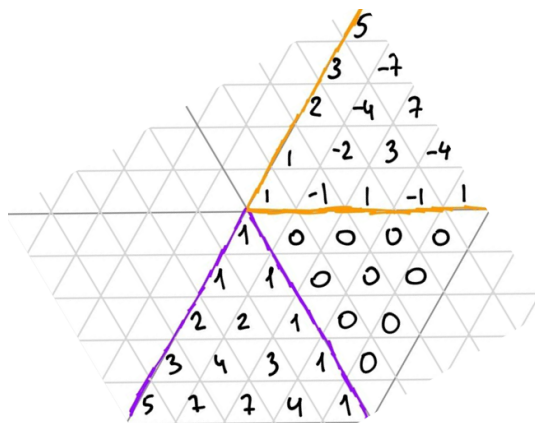
Посмотрим два случая: на обоих рёбрах стоят последовательность, отличные от последовательности единиц; на одном ребре стоит последовательность единиц, а на втором — любая другая.

1. На рёбрах любые последовательности.

Утверждение гипотезы не верно, посмотрим контрпример. На правом и левом ребре написаны натуральные числа. Тогда вместо чисел нулевой диагонали ставим натуральный ряд. Достаточно построить строчки вправо, чтобы понять, что в -1 строке не будет натурального ряда, как нам было нужно.



2. На левом ребре любая последовательность, на правом - последовательность единиц. Не доказано.



4.3 Работа с матрицами

Вспомним случай с $f(0; y) = 1$. Расположим значения функций на клетчатой плоскости, свободные клетки заполним нулями.

5 Выводы

В работе мы определили функцию, позволяющую задать «верхнюю» полуплоскость треугольника Паскаля. Сделали некоторые построения и рассмотрели их свойства, которые привели к фактам, которые, на самом деле, были не так давно открыты или сформулированы (см. ссылки на последовательности). Кроме того, осталось несколько утверждений, которые не имеют доказательства («Гипотеза об отражении»; гипотеза, сформулированная при работе с матрицами). Таким образом, проект может иметь развитие в данных разделах, что позволяет нам продолжить работу в будущем.

Список литературы

[1] "Конкретная математика" Р.Грэхем

https://morolimpiada.gumrf.ru/archive/documents/literatura-items/Konkretnaya_matematika_Grekhem_Knut_Patashnik.pdf

[2] Треугольник Риордана

<https://oeis.org/A027926>

[3] «Правая» часть треугольника Риордана

<https://oeis.org/A105809>

[4] Вторая строка $f(0; y) = F_y$

<https://oeis.org/A000217>

[5] Третья строка $f(0; y) = F_y$

<https://oeis.org/search?q=3%2C7%2C14%2C25%2C41%2C63%2C92&go=Search>

[6] Четвёртая строка $f(0; y) = F_y$

<https://oeis.org/search?q=5%2C12%2C26%2C51%2C92%2C155&go=Search>

[7] Последовательность сумм по вертикали у $f(0; y) = F_y$

<https://oeis.org/search?q=1+1+1+1+2+4+7+11&go=Search>