

Всероссийский конкурс исследовательских и проектных работ
школьников «Высший пилотаж»

Многоликие последовательные дроби

Исследовательская работа

Направление «Математика»

Автор:

Лизогубов Яромир Романович

учащийся 8 «В» класса

МАОУ «Медико-биологический лицей»

г. Саратова

2025 г.

Содержание

Введение.....	2
1. Теоретическая часть.....	4
1.1. Дробь и виды дробей.....	4
1.2. Дерево Штерна – Броко.....	4
1.3. Действия с дробями.....	5
1.4. Способы сравнения дробей.....	5
2. Практическая часть.....	6
2.1. Опорная задача.....	6
2.2. Решение основной задачи.....	7
2.3. Составление алгоритма решения аналогичных задач.....	11
2.4. Решение аналогичной задачи.....	13
Заключение.....	15
Список литературы и источников.....	16
Приложения.....	17

Введение

Дроби – очень интересный раздел в математике. По школьной программе их проходят в 5 классе. Тогда мы научились выполнять различные действия с дробями, сравнивать их. Несмотря на отсутствие подробного изучения, они не теряют актуальности в любом классе. Учитель предложила вспомнить старые знания и решить задачу с дробями повышенной сложности: *«Все обыкновенные правильные и несократимые дроби, числители и знаменатели которых – двухзначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$?»*.

Сначала я вспомнил о задаче, в которой надо было расположить число между двумя соседними дробями. Алгоритм решения такой задачи мне был известен. Но при решении задачи с дробью $\frac{4}{7}$ у меня возникло затруднение. Соседние и последовательно расположенные по возрастанию дроби, это не одно и то же?

Мы знаем, что определение последовательности натуральных чисел выполняется единственным способом, но у нас дроби. Распространяется ли на их последовательное расположение последовательность числителей при равных знаменателях, и наоборот, последовательность знаменателей при равенстве числителей? Или для последовательного расположения дробей просто необходимо их сравнивать? Интересно, а существует ли еще хотя бы один способ сравнения и определения последовательности дробей? Это предположение я попробую подтвердить или опровергнуть в результате своей работы.

Гипотеза: существует еще хотя бы один способ сравнения и определения последовательности дробей.

Поэтому **цель** работы: найти решение и сформулировать алгоритм решения задач такого типа или показать, что задача не имеет решения.

Для этого я поставил перед собой следующие **задачи**:

1. Найти дополнительную информацию о дробях, их особенностях.
2. Решить задачу или доказать, что она не имеет решения.
3. Составить алгоритм решения данных задач или алгоритм доказательства отсутствия решения.
4. Попробовать найти или придумать аналогичные задачи с разными сюжетами.

Методы исследования: индукция, анализ, синтез, моделирование обобщение, практическая работа.

1. Теоретическая часть

1.1. Дробь и виды дробей

Дробь – это число, составленное из одной или нескольких (равных) долей единицы. Дробь выражается отношением двух целых чисел $\frac{m}{n}$, где n – знаменатель дроби, который показывает, на сколько долей разделена единица, а m – числитель дроби, который показывает число таких долей.

Несократимая дробь – это дробь, у числителя и знаменателя которой нет общих множителей. Также дробь является несократимой, если её числитель и знаменатель являются взаимно простыми числами, т.е. не имеют общих делителей кроме 1.

Последовательные дроби – это дроби, которые различаются на $\frac{1}{n}$ или $\frac{m}{1}$. Также последовательными дробями называются дроби, при приведении которых к наименьшему общему знаменателю, получаются дроби, которые различаются на $\frac{1}{n}$ или $\frac{m}{1}$.

1.2. Дерево Штерна – Броко

Ряд Фарея n -го порядка представляет собой возрастающий ряд всех положительных несократимых правильных дробей, знаменатель которых меньше или равен n .

Если нужно найти дроби, которые находятся между любыми двумя дробями, можно использовать дерево Штерна–Броко (см. Приложение А).

Дерево Штерна–Броко – способ расположения всех неотрицательных несократимых дробей в вершинах упорядоченного бесконечного двоичного дерева.

Для построения дерева Штерна–Броко необходимо складывать числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем по схеме (см. Приложение А).

1.3. Действия с дробями

Основное свойство дроби заключается в том, что дробь не изменится, если и числитель, и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число.

Дополнительный множитель – это натуральное число, на которое нужно умножить числитель и знаменатель дроби, чтобы привести её к новому знаменателю.

1.4. Способы сравнения дробей

Сравнение дробей можно выполнять с помощью следующих способов:

- сравнение числителей при равенстве знаменателей;
- сравнение знаменателей при равенстве числителей;
- перекрестное умножение (см. Приложение Б).

Но есть еще способ сравнения для несократимых правильных дробей. Именно о таких дробях идет речь в условии задачи. **Закон Фарея** используется для определения последовательности несократимых правильных дробей.

Закон Фарея заключается в том, что:

- Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ – две соседние дроби в ряде Фарея (расположены в порядке возрастания), то выражение $bc - ad = 1$.
- Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три последовательные дроби ряда Фарея, то $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.

Закон ряда Фарея доказал О. Л. Коши (см. Приложение В). В научной литературе доказательство закона Фарея основывается на методе индукции** (**Математическая индукция – метод доказательства для последовательности натуральных чисел либо объектов, однозначно занумерованных натуральными числами).

2. Практическая часть

2.1. Опорная задача

Необходимо найти 3 значения x , таких, что выполняется неравенство:

$$\frac{5}{7} < x < \frac{6}{7}.$$

Решение:

Дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$ являются соседними и на первый взгляд между ними нельзя расположить число. Но если воспользоваться основным свойством дроби и увеличить числитель и знаменатель каждой дроби вдвое, то между ними можно будет расположить, хотя бы одно число.

$$\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} < x < \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 2} \Leftrightarrow \frac{10}{14} < x < \frac{12}{14}$$

$$\frac{10}{14} < \frac{11}{14} < \frac{12}{14}$$

По условию надо вставить 3 значения. Тогда, получается, достаточно увеличить числитель и знаменатель в 4 раза.

Приведем дроби к новому общему знаменателю:

$$\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$$

$$\frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{24}{28}$$

Между 20 и 24 есть числа: 21, 22, 23.

Вариант ответа: $\frac{21}{28}, \frac{22}{28}, \frac{23}{28}$.

Заметим, что одна из этих дробей сократимая, т.е. ответ можно записать в виде: $\frac{21}{28}, \frac{11}{14},$

$$\frac{23}{28}.$$

Вывод: Соседние несократимые дроби не обязательно имеют одинаковый знаменатель.

2.2. Решение основной задачи

Все обыкновенные правильные и несократимые дроби, числители и знаменатели которых – двухзначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$?

Решение:

По условию задачи дроби должны быть несократимыми, тогда надо рассмотреть дроби, числитель и знаменатель которых выражены парами взаимно простых чисел (см. приложение Г).

Таким образом, нам подходят пары, в числителях и знаменателях которых:

1. Большее число – простое, и это число будет в знаменателе.
2. Числитель и знаменатель не имеют общих делителей при разложении на простые множители и не являются соседними и соседними нечетными числами.

В теоретической части рассмотрены 3 случая, когда дроби будут последовательными.

Применим эти 3 случая к решению нашей задачи.

Числа 4 и 7 – однозначные, поэтому запишем ряд дробей, которые можно получить из дроби $\frac{4}{7}$, используя основное свойство дроби. Можно записывать не все числа, а только те, которые можно получить путём умножения на простое число, т. к. в задаче сказано, что должны получиться несократимые дроби. Значит, изначально мы должны умножать на простое двухзначное число.

Например: $7 \cdot 13 = 91$, 13 - простое число, знаменатель дроби – ответа.

$$\frac{4}{7} = \left\{ \frac{44}{77}, \frac{52}{91}, \frac{68}{119}, \frac{76}{133}, \frac{92}{161}, \frac{118}{203}, \frac{124}{217}, \frac{148}{259}, \frac{164}{287}, \frac{172}{301}, \frac{188}{329}, \frac{212}{371}, \frac{236}{413}, \frac{244}{427}, \frac{268}{469}, \frac{284}{497}, \frac{292}{511}, \frac{316}{553}, \frac{332}{581}, \frac{356}{623}, \frac{388}{679} \right\}.$$

Самое актуальное число – 7, т. к. знаменатели некоторых дробей из ряда делятся на это число: 91, 119, 133...

А) Начнем с дроби $\frac{52}{91}$.

$91 = 13 \cdot 7$. Значит, знаменатель у дробей будет 13.

52 не делится на 7. Ближайшие числа, делящиеся на 7: 49 и 56.

Получаются дроби $\frac{7}{13}$ и $\frac{8}{13}$. Но 7 и 8 однозначные числа, что не соответствует условию задачи.

По такому принципу пересчитаем все дроби из ряда и получим 18 пар:

Таблица 1. Дроби, соседние с $\frac{4}{7}$ по числителю

Дробь, полученная из $\frac{4}{7}$	$\frac{76}{133}$	$\frac{92}{161}$	$\frac{118}{203}$	$\frac{124}{217}$	$\frac{148}{259}$
Соседние с ней дроби	$\frac{10}{19}$ и $\frac{11}{19}$	$\frac{13}{23}$ и $\frac{14}{23}$	$\frac{16}{29}$ и $\frac{17}{29}$	$\frac{17}{31}$ и $\frac{18}{31}$	$\frac{21}{37}$ и $\frac{22}{37}$

$\frac{164}{287}$	$\frac{172}{301}$	$\frac{188}{329}$	$\frac{212}{371}$	$\frac{236}{413}$	$\frac{244}{427}$	$\frac{268}{469}$
$\frac{23}{41}$ и $\frac{24}{41}$	$\frac{24}{43}$ и $\frac{25}{43}$	$\frac{26}{47}$ и $\frac{27}{47}$	$\frac{30}{53}$ и $\frac{31}{53}$	$\frac{33}{59}$ и $\frac{34}{59}$	$\frac{34}{61}$ и $\frac{35}{61}$	$\frac{38}{67}$ и $\frac{39}{67}$

$\frac{284}{497}$	$\frac{292}{511}$	$\frac{316}{553}$	$\frac{332}{581}$	$\frac{356}{623}$	$\frac{388}{679}$
$\frac{40}{71}$ и $\frac{41}{71}$	$\frac{41}{73}$ и $\frac{42}{73}$	$\frac{45}{79}$ и $\frac{46}{79}$	$\frac{47}{83}$ и $\frac{48}{83}$	$\frac{50}{89}$ и $\frac{51}{89}$	$\frac{55}{97}$ и $\frac{56}{97}$

Определим последовательность дробей с дробью $\frac{4}{7}$ по закону Фарея. Дробей, соседних с $\frac{4}{7}$, оказалось больше двух, это $\left\{\frac{11}{19}, \frac{13}{23}, \frac{21}{37}, \frac{35}{61}, \frac{45}{79}, \frac{51}{89}\right\}$.

Ответ: $\frac{45}{79}$ и $\frac{51}{89}$.

Проверим его с помощью второго способа – будем искать последовательные дроби с общим числителем.

Б) Начнем с дроби $\frac{44}{77}$.

$44=4 \cdot 11$. Значит, числитель у дробей будет 11.

77 не делится на 4. Ближайшие числа, делящиеся на 4: 76 и 80.

Получаются дроби $\frac{11}{19}$ и $\frac{11}{20}$.

По такому принципу пересчитаем все дроби из ряда:

Таблица 2. Дроби, соседние с $\frac{4}{7}$ по знаменателю

Дробь, полученная из $\frac{4}{7}$	$\frac{44}{77}$	$\frac{52}{91}$	$\frac{68}{119}$	$\frac{76}{133}$	$\frac{92}{161}$	$\frac{116}{203}$
Соседние с ней дроби	$\frac{11}{19}$ и $\frac{11}{20}$	$\frac{13}{22}$ и $\frac{13}{23}$	$\frac{17}{29}$ и $\frac{17}{30}$	$\frac{19}{33}$ и $\frac{19}{34}$	$\frac{23}{40}$ и $\frac{23}{41}$	$\frac{29}{50}$ и $\frac{29}{51}$

$\frac{124}{217}$	$\frac{148}{259}$	$\frac{164}{287}$	$\frac{172}{301}$	$\frac{188}{329}$	$\frac{212}{371}$	$\frac{236}{413}$
$\frac{31}{54}$ и $\frac{31}{55}$	$\frac{37}{64}$ и $\frac{37}{65}$	$\frac{41}{71}$ и $\frac{41}{72}$	$\frac{43}{75}$ и $\frac{43}{76}$	$\frac{47}{82}$ и $\frac{47}{83}$	$\frac{53}{92}$ и $\frac{53}{93}$	$\frac{59}{103}$ и $\frac{59}{104}$

Заметим, что получили 12 пар последовательных дробей, подходящих под условие задачи. Дробей соседних с $\frac{4}{7}$ больше, чем две, это $\left\{ \frac{11}{19}, \frac{13}{23}, \frac{17}{30}, \frac{19}{33}, \frac{23}{40}, \frac{29}{51}, \frac{31}{54}, \frac{37}{65}, \frac{41}{72}, \frac{43}{75}, \frac{47}{82}, \frac{53}{93} \right\}$.

Между какими именно дробями находится $\frac{4}{7}$? Выполним сравнение дробей при помощи перекрёстного умножения.

Ответ: $\frac{53}{93}$ и $\frac{47}{82}$.

Он не подтверждает ответ, полученный в пункте А). Можно ли получить однозначный ответ в этой задаче?

В) Построим дерево Штерна–Броко. По этому дереву дробь $\frac{4}{7}$ образуется от дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$. Т. к. нам необходимо найти соседние дроби с $\frac{4}{7}$, то достаточно просчитать только те дроби, которые добавляются на каждом уровне справа и слева от дроби $\frac{4}{7}$. Слева, со стороны $\frac{3}{5}$, чтобы быть ближе всего к $\frac{4}{7}$, дробь должна быть меньше всех, а справа больше (см. Приложение Д). Постепенно продвигаясь от уровня к уровню, получим ответ: $\frac{53}{93}$ и $\frac{55}{96}$. Продолжать дерево Штерна–Броко, искать дроби следующего уровня, не имеет смысла, потому что дальше будут трёхзначные числа в знаменателе.

Полученный ответ $\frac{53}{93}$ и $\frac{55}{96}$, не подтверждает результаты решений в пунктах А) и Б). Какой же из ответов является верным? Заметим, что продолжая дерево Штерна–Броко вширь, т.е. выписывая все дроби на каждом уровне, мы получим много дробей, в том числе и те, которые уже находили в пунктах решения А) и Б). Но самыми близкими из дробей, числители и знаменатели которых выражены двузначными числами, к числу $\frac{4}{7}$ будут именно $\frac{53}{93}$ и $\frac{55}{96}$, т.е. эти дроби будут последовательными между которыми заключено число $\frac{4}{7}$.

Ответ: $\frac{53}{93}$ и $\frac{55}{96}$.

Вывод: Ответ практически совпал с ответом в задачнике. Предполагаю, что ответ в задачнике $\frac{53}{93}$ и $\frac{56}{96}$ содержит опечатку, т.к. дробь $\frac{56}{96}$ сократима.

Решение задачи способами А) и Б) не удобны, т. к. одна маленькая ошибка может привести к неправильному ответу, а проверять и пересчитывать долго. Самый продуктивный, быстрый и более простой способ решения этой задачи представлен в пункте В).

Значительно упрощает решение этой задачи знание алгоритма построения дерева Штерна–Броко и закон ряда Фарея. К единственному недостатку можно отнести объем решения – тело дерева (см. Приложение 5). Можно ли найти способ, позволяющий упростить этот процесс?

2.3. Составление алгоритма решения аналогичных задач

Проанализируем, как получаются соседние с $\frac{4}{7}$ дроби на каждом уровне.

Таблица 3. Получение дробей соседних с $\frac{4}{7}$

Уровень		$\frac{4}{7}$	
0	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$
1		$\frac{4}{7}$	
2	$\frac{1+4}{2+7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3+4}{5+7}$
3	$\frac{1+4+4}{2+7+7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3+4+4}{5+7+7}$
4	$\frac{1+4 \cdot 3}{2+7 \cdot 3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3+4 \cdot 3}{5+7 \cdot 3}$
...	...	...	...
$x+1$	$\frac{1+4 \cdot x}{2+7 \cdot x}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3+4 \cdot x}{5+7 \cdot x}$

На уровнях 0 и 1 – получение дроби $\frac{4}{7}$. На уровнях 2–4 – примеры, как получаются дроби, соседние с $\frac{4}{7}$. На уровне $(x+1)$ установлена закономерность получения соседних дробей: каждый раз к числителям прибавляется 4, а к знаменателям 7. Значит, эти суммы можно заменить произведением (см. столбцы 2 и 4).

Значит, на уровне, который соответствует условию задачи, получим дроби $\frac{1+4 \cdot x}{2+7 \cdot x}$ и $\frac{3+4 \cdot x}{5+7 \cdot x}$ соседние с $\frac{4}{7}$. По условию числители и знаменатели этих дробей – двузначные числа.

Наибольшее значение будет принимать выражение $5+7 \cdot x$, значение которого не может быть больше 99, т.е. запишем неравенство: $5+7 \cdot x \leq 99$

Решим неравенство: $5+7 \cdot x \leq 99$

$$7x \leq 94$$

$$x \leq 13\frac{3}{7}$$

Но x – должен быть целым и максимальным числом, поэтому он будет равен 13.

Проверим соответствие ответов:

$$\frac{1+4 \cdot x}{2+7 \cdot x} = \frac{1+4 \cdot 13}{2+7 \cdot 13} = \frac{53}{93} \quad \frac{3+4 \cdot x}{5+7 \cdot x} = \frac{3+4 \cdot 13}{5+7 \cdot 13} = \frac{55}{96}$$

Ответы совпали. Этот способ значительно сокращает запись решения и вычисления.

Запишу его в общем виде.

Формулировка задачи в общем виде: Пусть дана некоторая дробь $\frac{a}{b}$. Требуется определить между какими последовательными несократимыми дробями, числители и знаменатели которых выражены двузначными числами, она заключена.

Алгоритм решения:

1. Определить, от каких дробей по дереву Штерна–Броко образовалась известная дробь $\frac{a}{b}$.

Пусть это будут дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{p}$.

2. Записать формулы получения чисел, подходящих по условию, в соответствии с формулами: $\frac{m+xa}{n+xb}$ и $\frac{k+xa}{p+xb}$, где $(x+1)$ – номер соответствующего уровня дерева Штерна–Броко.

3. Определить, какое выражение наибольшее, ввести для него ограничения (*условие и ограничение этого пункта будут зависеть от условия задачи), например, не превышает 99*.

4. При помощи уравнения или неравенства найти неизвестное число x , означающее порядковый номер предыдущего уровня.

5. Найти дроби.

2.4. Решение аналогичной задачи

На просторах интернета мне удалось найти задачу, в которой присутствуют элементы моего проекта. **Условие задачи:** «Из правильной дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

а) Можно ли за несколько таких ходов из дроби $\frac{2}{3}$ получить дробь $\frac{29}{41}$?

б) Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{6}{7}$?

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ меньше 0,7. Найдите наибольшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за 2 таких хода.»

В этой задаче к моему проекту относится только третий пункт, первые два служат для разработки правил и алгоритмов, относящихся к решению данной задачи. Решим их все.

Общие обозначения: получение дроби обозначается символом « $\rightarrow$ ».

Решение:

а) Будем последовательно выполнять указанные ходы с дробью $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{5}{7} \rightarrow \frac{12}{17} \rightarrow \frac{29}{41}$$

За три хода мы получили необходимую дробь.

Ответ: можно.

б) Составим уравнение по правилу хода, принимая, что дробь $\frac{6}{7}$ можно получить за два хода. Попробуем найти дробь, из которой получили $\frac{6}{7}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a+b}{2a+b} &= \frac{6}{7} \\ \frac{a+b}{2a+b} &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7(a+b) &= 6(2a+b) \\ 7a+7b &= 12a+6b \\ b &= 5a\end{aligned}$$

Значит, знаменатель дроби из которой получена дробь $\frac{6}{7}$, в пять раз больше числителя.

Нам подходит только дробь $\frac{1}{5}$.

Дальше мы должны получить дробь $\frac{1}{5}$ из другой. Числитель равен 1 и должен быть равен сумме двух натуральных чисел. Но это невозможно.

Ответ: нельзя.

в) Нам нужно найти дроби, которые будут ближе всего к $\frac{7}{10}$. Это можно сделать по закону Фарея:

$$\frac{c}{d} < \frac{7}{10}$$

$$7d - 10c = 1$$

Все дроби можно представить в виде $\frac{7x+2}{10x+3}$.

Составим таблицу, в которой рассмотрим все дроби:

Таблица 4. Дроби, соседние с $\frac{7}{10}$

x	Дробь $\frac{c}{d}$	Десятичный вид дроби $\frac{c}{d}$	Получение за два хода
0	$\frac{2}{3}$	0,6666	$\frac{2}{3} \leftarrow \frac{1}{1}$ (сократимая)
1	$\frac{9}{13}$	0,6923	$\frac{9}{13} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{3}$
2	$\frac{16}{23}$	0,6956	$\frac{16}{23} \rightarrow \frac{7}{9} \rightarrow \frac{2}{5}$
3	$\frac{23}{33}$	0,6969	$\frac{23}{33} \rightarrow \frac{10}{13} \rightarrow \frac{3}{7}$
4	$\frac{30}{43}$	0,6976	$\frac{30}{43} \rightarrow \frac{13}{17} \rightarrow \frac{4}{9}$
...			
7	$\frac{51}{73}$	0,6986	$\frac{51}{73} \rightarrow \frac{22}{29} \rightarrow \frac{7}{15}$
...			
100	$\frac{702}{1003}$	0,6999002	$\frac{702}{1003} \rightarrow \frac{301}{401} \rightarrow \frac{100}{201}$

Этот ряд можно продолжать бесконечно, но дробь никогда не будет равна 0,7. Можно заметить, что чем больше x , то тем больше дробь, из которой получена $\frac{c}{d}$, а, значит, её можно будет получить из других.

Единственная дробь, которую нельзя получить за два хода $-\frac{2}{3}$. Она и является ответом.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Вывод: при помощи ряда Фарея и неявно дерева Штерна-Броко решена задача другого характера, что показывает, что эти правила позволяют решать различные задачи. Дроби можно использовать в разных областях математики. Можно заметить, что формула из алгоритма решения задач очень похожа на формулу из этой задачи и в решении 3 пункта: $\frac{xa+m}{xb+n}, \frac{a+b}{2a+b}$ и $\frac{7x+2}{10x+3}$.

Заключение

Дроби – это очень широкое понятие, в него можно углубляться всё сильнее и сильнее. Дроби делятся на много типов: правильные и неправильные, сократимые и несократимые, обыкновенные и десятичные, бывают последовательные, смешанные дроби. В ходе своей работы я использовал известные нам действия с дробями и 3 способа определения последовательности дробей. Мне понадобились не только знания из школьной программы, но и дополнительные. Именно эти дополнительные знания позволили мне решить задачу повышенной сложности. Одно из них ряд несократимых последовательных дробей Фарея, другое – связанное с ним, дерево Штерна–Броко. Значит, моя гипотеза о том, что существует еще хотя бы один способ сравнения и определения последовательности дробей, подтвердилась. Рассматривая правило построения дерева, заметил закономерность. Это стало основой для построения более простого алгоритма решения подобных задач. Цель достигнута.

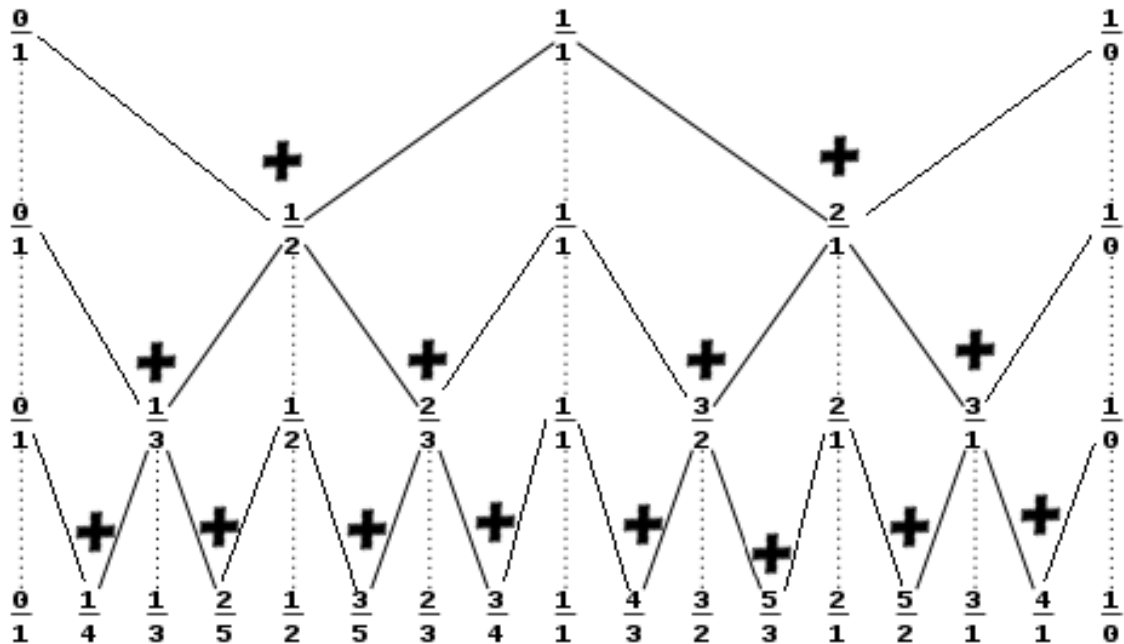
Для дробей нет однозначного расположения соседних чисел. Всегда можно найти дроби, которые можно поставить между двумя соседними. Верный ответ зависит от заданных ограничений в условии задачи. В этом и заключается их многоликость.

Список литературы и источников

1. Акулич И. Ф., Башмакова И. Г., Васильев Н. Б. и др. Математика. Полная энциклопедия. Москва, Росмэн, 2020. 256 с.
2. Вольфсон Г. И. и др. ЕГЭ 2018. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2018. — 112с.
3. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика 5 класс. Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018.176 с.
4. <https://resh.edu.ru>(теоретический материал).
5. <https://www.cleverstudents.ru>(теоретический материал).

Приложения

Приложение А. Дерево Штерна–Броко.



Приложение Б. Сравнение дробей при помощи перекрёстного умножения.

Предположим $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Найдем $ad = e$ и $cd = f$.

Если $e < f$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Приложение В. Доказательство закона Фарея, выполненное О.Л. Коши.

Доказать закон Фарея проще всего при помощи индукции. База индукции очевидна: первый ряд Фарея состоит всего лишь из двух дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$, при этом $1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$.

Предположим, что для некоторого натурального n закон верен для $(n - 1)$ -го ряда Фарея. Чтобы получить из $(n - 1)$ -го ряда n -й, мы должны добавить дроби вида $\frac{m}{n}$, где $1 \leq m \leq n$ и $\text{НОД}(m, n) = 1$. Рассмотрим одну из таких дробей $\frac{m}{n}$ и обозначим через $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ближайшие к ней слева и справа дроби $(n - 1)$ -го ряда:

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$$

Теперь – внимание:

$$\frac{1}{bd} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{cn - dm}{dn} + \frac{bm - an}{bn} \geq \frac{1}{dn} + \frac{1}{bn} = \frac{b + d}{bdn}, \quad (*)$$

следовательно, $b + d \leq n$. Если бы это неравенство было строгим, то дробь $\frac{a+c}{b+d}$ – медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – лежала бы между ними и принадлежала бы $(n - 1)$ -му ряду Фарея. Но никаких дробей между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ в $(n - 1)$ -м ряде Фарея нет. Следовательно, $b + d = n$, а неравенство в формуле (*) – на самом деле равенство. Значит,

$$cn - dm = 1 \text{ и } bm - an = 1$$

Казалось бы, первый закон Фарея доказан: последние две формулы – это как раз нужные формулы для n -го ряда Фарея. Но... почему мы уверены, что в n -м ряде между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ расположена лишь одна дробь со знаменателем n ? А вот почему: приравняв левые части последних двух неравенств, получаем

$$cn - dm = bm - an$$

$$m(b + d) = n(a + c)$$

Поскольку $n = b + d$, то $m = a + c$. Значит, при переходе от $(n - 1)$ -го ряда к n -му ряду Фарея между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ вставляется одна дробь

$$\frac{m}{n} = \frac{a + c}{b + d}$$

Доказательство завершено!

Приложение Г.

Пары взаимно простых чисел	Соответствие условию задачи
большее число – простое;	Подойдет, если это число будет в знаменателе.
большее число не делится на меньшее простое число;	Неправильная дробь, не подходит по условию задачи, т.к. нас интересуют дроби меньше 1.
соседние нечётные числа;	Не подойдет, т.к. нам дана дробь, разница чисел в числителе и знаменателе равна 3.
одно из чисел – единица;	Не подходит, т.к. нам нужны дроби, числители и знаменатели которых двухзначные числа.
соседние числа;	Не подойдет, т.к. нам дана дробь, разница чисел в числителе и знаменателе равна 3.
не имеют общих делителей при разложении на простые множители.	Подойдет, но при определенных условиях.

Приложение Д. Часть дерева Штерна–Броко для основной задачи.

(зелёным цветом выделены дроби, которые были найдены в пунктах А и Б).

