

Международная олимпиада молодежи – 2025

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100

МАТЕМАТИКА

10 класс

Вариант 3

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Производитель шоколада продавал плитку весом 160 грамм за 4 доллара. Недавно вес плитки был уменьшен до 125 грамм, но её цена осталась 4 доллара. Каков процентный рост цены на шоколад этого производителя?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 2.

При скольких различных положительных целых значениях параметра c квадратное уравнение $x^2 + 123x + c = 0$ имеет два различных целых корня?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 3.

Для лечения заболевания доктор назначил пациенту следующее лечение:

1. Зелёное лекарство: 1 таблетка каждые 5 часов, принимать с полным стаканом воды. Полный курс – 5 упаковок по 12 таблеток.
2. Синее лекарство: 1 таблетка каждые 7 часов, принимать с полным стаканом воды. Полный курс – 4 упаковки по 10 таблеток.
3. Внимание: Если время приёма обоих лекарств совпадает, принимать обе таблетки с одним полным стаканом молока!

На следующий день пациент начал курс лечения в 6 часов утра, приняв по одной зелёной и синей таблетке. Сколько стаканов молока выпьет он за всё время этого лечения?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 4.

Вася записывает в ряд по возрастанию некоторые натуральные делители числа 10^{100} так, что каждое следующее число делится на предыдущее. Какое наибольшее количество чисел, кратных 10^{25} , могло оказаться в его ряду?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 5.

Найдите наибольшее значение выражения $300xy(x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3)$ при положительных x и y , сумма которых равна 1.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 6.

К 11ти годам школьник так и не научился складывать многозначные числа. Почти в каждой сумме ошибается, но не более чем на 11. Однажды он, используя 6 разных цифр, взял три двузначных числа, нашёл их сумму (146, это считается одной операцией) и три их попарные суммы (57, 80, 101). Найдите среднее из трёх исходных чисел этого школьника.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 7.

Дан правильный 19-угольник $A_1A_2 \dots A_{19}$. Сколько есть способов выбрать три из его вершин так, чтобы треугольник с выбранными вершинами был тупоугольным? (Способы, отличающиеся поворотом или симметрией, считаются разными.)

Ответ: _____ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

В треугольнике ABC длина высоты AN_A равна h_a , длина высоты BN_B равна h_b и радиус вписанной окружности равен r . Найдите длину BC , если $h_a = \frac{12}{5}$, $h_b = 4$ и $r = 1$.

Ответ: _____ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

Перестановкой на 8 элементах называется функция $f(x)$, такая, что каждое из чисел $f(1), f(2), \dots, f(8)$ равно одному из чисел $1, 2, \dots, 8$, причем каждое значение принимается ровно 1 раз, во всех остальных точках функция не определена. Перестановку назовем *интересной*, если для каждого $i \in [1..8]$ найдется нечетное k , такое, что $\underbrace{f(f \dots f(i))}_{k \text{ раз}} = i$. Найдите число интересных перестановок на 8 элементах.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство:

Задача 10.

Геракл украл из Сада Гесперид много яблок вечной молодости. Известно, что в них содержится вещество вечной молодости – Нектар, 6.4 микрограмма на килограмм. Килограмм яблок можно залить x литрами воды, поварить час и слить отвар, при этом Нектар равномерно распределится по воде и яблокам (то есть $x/(x + 1)$ доля всего Нектара перейдет в отвар, $1/(x + 1)$ доля останется в яблоках). Варенные один раз яблоки можно проварить еще раз, возможно, выбрав другое количество воды. А вот третий раз варить нельзя – Нектар разлагается при трехкратной варке. Полученные отвары можно смешивать и разбавлять водой.

Компания Аид Лтд скупает раствор нектара, платит 1 талант за литр, содержащий хотя бы 1 мкг на литр, более слабые не принимает. Какую наибольшую сумму может заработать Геракл с каждого килограмма украденных яблок?

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство: