

Международная олимпиада молодежи – 2025

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 3

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

В начале января Катя вместе с коллегами создала группу для решения задач по математике. Они много учились, и поэтому каждый месяц решали вдвое больше задач, чем в предыдущем. К концу мая того же года группа решила в общей сложности 651 задачу. Сколько задач группа решила в январе?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 2.

Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположен в пространственной системе координат следующим образом: $A(0, 0, 0)$, $B(300, 0, 0)$, $C(300, 300, 0)$, $C_1(300, 300, 300)$. На каком наибольшем целочисленном расстоянии можно разместить на рёбрах куба две точки?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 3.

На велосипедном треке Антон, Боря и Вова стартовали одновременно с постоянными скоростями и первый раз вместе встретились в точке старта, когда проехали соответственно 2, 3 и 4 круга. Тренировка закончилась, когда Вова проехал ровно 40 кругов. Сколько раз (не считая начальный, но считая конечный момент) на тренировке возникал момент, когда в одной точке встречались хотя бы два велосипедиста?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 4.

При скольких различных целых значениях параметра b квадратное уравнение $x^2 + bx + 2025 = 0$ имеет два различных целых корня?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 5.

Аня взвесила на напольных весах себя, затем своего кота, затем себя вместе с котом. Получила результаты 29,500 кг, 4,600 кг и 33,300 кг соответственно. Для какого наименьшего веса X можно утверждать, что весы хотя бы раз выдали результат, отличающийся не меньше чем на X от правильного? Выразите ответ в граммах, если он не целый – округлите вниз до ближайшего целого числа.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 6.

В казино игрок бросает 8-гранную и 12-гранную кости (на гранях костей стоят числа от 1 до 8 и от 1 до 12 соответственно, все грани выпадают равновероятно). Если на 12-гранной кости выпало число меньшее, чем на 8-гранной кости, то выигрыш игрока – это число, выпавшее на 8-гранной кости, минус число на 12-гранной кости, иначе выигрыш равен 0. Найдите математическое ожидание выигрыша, умножьте его на 1000, округлите вниз до ближайшего целого и запишите в качестве ответа.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 7.

Треугольник ABC – равнобедренный, $AB = BC$. Длины медианы и высоты из вершины A равны $\sqrt{\frac{5}{2}}$ и $\sqrt{2}$ соответственно. Найдите все значения, которые при этих условиях может принимать длина стороны AC .

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

В выражении $(2 + \sqrt{3})^{12345}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получили запись вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b – целые числа. Найдите остаток при делении b на 10.

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

По координатной плоскости в течение минуты движутся с постоянными векторами скоростей точки A, B, C . Точка A всю минуту имела координаты $(0, 0)$, B – в начале $(16, 12)$, в конце $(12, 8)$; точка C в начале имела координаты $(-93, -67)$, в конце $(173, 127)$. Сколько раз за эту минуту (включая начальный и конечный моменты) площадь треугольника ABC была целой?
(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство:

Задача 10.

Любопытному Васе родители купили не очень точные напольные весы. Вася взвесил на них себя, своего кота и свою бабушку, порознь и во всех возможных сочетаниях, и получил следующие результаты (см. таблицу):

Вася	34,700 кг
Кот	6,500 кг
Бабушка	82,220 кг
Вася и Кот	41,320 кг
Вася и Бабушка	116,280 кг
Кот и Бабушка	88,380 кг
Вася, Кот и Бабушка	123,200 кг

Для какого наибольшего веса X можно утверждать, что хотя бы раз показания весов отличались от истинного веса не менее чем на X ? Ответ выразите в граммах, если число не целое – округлите вниз до ближайшего целого. *Подсказка: пятая задача умышленно дана, чтобы помочь разобраться в сюжете, но десятая задача гораздо сложнее пятой.*

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство: